UNIVERSITE DE CERGY-PONTOISE

E.D. ECONOMIE, MANAGEMENT, MATHEMATIQUES CERGY

LABORATOIRE DE RECHERCHE THEMA

INSTITUT SUPERIEUR DE GESTION DE TUNIS

E.D. SCIENCES DE GESTION

ESSAIS SUR LE RISQUE DE CREDIT DES OBLIGATIONS: ANALYSE DE LA MIGRATION DES NOTES ET DES EFFETS DE CONTAGION

THESE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR EN SCIENCES de GESTION

de l'Université de Cergy-Pontoise et de l'ISG de Tunis

Présentée et soutenue publiquement le 22 Mars 2013

par

Mme Myriam BEN AYED

JURY

Directeurs de thèse :	**Monsieur Adel KARAA** Professeur à l'ISG de Tunis
	Monsieur Jean-Luc PRIGENT Professeur à l'Université de Cergy-Pontoise
Rapporteurs :	**Monsieur Jameleddine CHICHTI** Professeur à l'ESC de Tunis
	Monsieur Fredj JAWADI Maître de Conférences à l'Université d'Evry
Examinateurs :	**Monsieur Mondher BELLALAH** Professeur à l'Université de Cergy-Pontoise
	Monsieur Olivier SCAILLET Professeur à l'Université de Genève

Je dédie cette thèse à mon père, ma mère, mon mari et mon fils

Remerciements

Au terme de ce travail, c'est avec beaucoup d'émotion que je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont aidé à réaliser cette thèse.

Je tiens tout d'abord à remercier mes deux directeurs de thèse, Mr Adel Karaa et Mr Jean Luc Prigent, pour m'avoir dirigé. J'ai beaucoup appris à leurs côtés et je suis très honorée de les avoir eu comme encadreurs. Je tiens à les remercier pour leur patience, mais aussi pour leurs conseils et leur soutien.

Je remercie tous les membres du jury pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse : Messieurs Fredj Jawadi, Jameleddine Chichti, Mondher Bellalah et Olivier Scaillet.

J'adresse également toute ma gratitude à toute ma famille, tous mes ami(e)s et à toutes les personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de ce travail.

Je remercie profondément mon mari, Anis Ghamgui pour tous ses encouragements, son aide précieuse pour la collecte des données et son soutien. La thèse a été parfois un moment difficile, et très preneuse de temps, mais tu as toujours su être patient et compréhensif.

Je tiens également à remercier mon frère Mohamed qui a toujours été auprès de moi.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à mes parents. Malgré mon éloignement depuis de nombreuses années, leur confiance, leur tendresse et leur amour me portent et me guident tous les jours. Merci pour avoir contribué à faire de moi ce que je suis aujourd'hui.

Table des matières

Table des figures 3

Liste des tableaux 4

Introduction Générale 6

Chapitre 1. Principes généraux du risque de crédit et de la notation 12
1. Introduction 12
2. Généralités sur le risque de crédit 13
3. La notation de crédit 22
4. Conclusion 39

Chapitre 2. Présentation de la notion de processus ponctuels marqués et applications en risque de crédit 41
1. Introduction 41
2. La notion de processus ponctuel marqué 43
3. Exemples fondamentaux 45
4. Applications en risque de crédit 53
5. Conclusion 63

Chapitre 3. Modélisation des parcours de notation des firmes 64
1. Introduction 64
2. Revue de la littérature 65
3. Modélisation des parcours de notations financières des firmes 68
4. Les données 76
5. Résultats et interprétations 79
6. Conclusion 88
7. Annexe 89

Chapitre 4. L'impact de la crise sur le parcours de notation des firmes 90
1. Introduction 90
2. Revue de la littérature 92
3. Modèle 93
4. Données 97
5. Résultats et interprétations du modèle 100
6. Effet de la crise sur le processus de notation des firmes 105
7. Conclusion 107
8. Annexe 108

Chapitre 5. Modélisation de la contagion à l'aide de processus ponctuels marqués 117
1. Introduction 117
2. Le modèle financier avec contagion 119
3. L'estimation du processus ponctuel modélisant la contagion 122
4. Evaluation de certains CDO 128
5. Conclusion 133

Conclusion Générale 134

Bibliographie 136

Table des figures

1	Mécanisme de la titrisation	20
2	Evolution du marché des CDO	21
1	Spreads de Merton en fonction de la maturité	53
2	Spreads en fonction de la maturité	54
1	Exemple de trajectoire de notation illustrant l'évolution du processus Xt	69
2	Taux instantané de passer au temps t d'une classe j vers une classe k sachant que l'épisode de migration en cours n'a pas été achevé avant le temps t	82
3	Probabilités de transition des notes d'une classe j vers une classe k, selon l'ordre de l'épisode de migration (1)	85
4	Probabilités de transition des notes d'une classe j vers une classe k, selon l'ordre de l'épisode de migration (2)	86
5	Probabilités de transition des notes d'une classe j vers une classe k, selon l'ordre de l'épisode de migration (3)	87
6	Durée moyenne estimée d'un épisode de migration des notes d'une classe j vers une classe k, selon l'ordre de ce dernier	89
1	Evolution des notes avant et après la crise	98
2	Durée moyenne des épisodes de notation avant et après la crise	99
3	Evolution du contexte des épisodes de notation en fonction de la durée	104
4	Répartition des probabilités d'appartenance à un groupe par région et par crise	105

Liste des tableaux

1	Les familles de critères de Standard and Poor's	26
2	Les familles de critères de Moody's	27
3	Les familles de critères de Fitch	28
4	Catégorie d'investissement pour Standard and Poor's	29
5	Catégorie de spéculation pour Standard and Poor's	30
6	Catégorie d'investissement à court terme pour Standard and Poor's	31
7	Catégorie spéculative court terme pour Standard and Poor's (suite)	31
8	Catégorie d'investissement pour Moody's	32
9	Catégorie de spéculation pour Moody's	32
10	Catégorie d'investissement à court terme pour Moody's	33
11	Catégorie d'investissement pour Fitch Ratings	34
12	Catégorie de spéculation pour Fitch Ratings	35
13	Catégorie d'investissement à court terme pour Fitch Ratings	36
1	Exemples de distribution de durée	51
2	Exemples de distribution de durée (suite)	52
1	Dénombrement des épisodes de notation en fonction du type de note enregistrée en début et fin de période	77
2	La durée moyenne des épisodes de notation en fonction du type de note enregistrée en début et fin de période	78
3	Episodes de notation	79
4	Estimation des paramètres des fonctions de hasard (1)	80
5	Estimation des paramètres des fonctions de hasard (2)	81
1	Test de Student pour la variable de durée	100
2	Estimation des paramètres	102
3	Caractéristique des groupes de références	103
4	Résultat de la régression avec codage optimal	104
5	Estimation des paramètres par la méthode probit	106
6	Récapitulatif du traitement des observations	109

7	Récapitulatif du traitement des observations (suite)	110
8	Récapitulatif du traitement des observations (suite)	111
9	Récapitulatif du traitement des observations (suite)	112
10	Résultat des estimations par Gauss pour la region USA	113
11	Résultat des estimations par Gauss pour la region USA (suite)	114
12	Résultat des estimations par Gauss pour la region Europe-Asie	115
13	Résultat des estimations par Gauss pour la region Europe-Asie (suite)	116

Introduction Générale

Les entreprises, pour assurer leurs financements par crédit auprès des banques ou pour lever des fonds sur les marchés financiers, sont de plus en plus soumises aux évaluations du risque de défaillance ou de non-remboursement. Ces évaluations touchent toutes les entités[1] demandeuses de crédit notamment les entreprises, les collectivités locales et les états souverains. A travers en particulier les agences de notation, elles influent sur les conditions d'attribution des crédits et des financements des dettes, notamment sur le niveau des spreads. Une question assez naturelle se pose en particulier : la notation financière a-t-elle une influence sur les conditions d'octroi des crédits sur les marchés financiers ?

L'idée de notation des entités et des produits financiers par les agences de notation développée aujourd'hui se confond à ses débuts avec celle des entreprises d'analyse financière des crédits. La première crise financière américaine de 1837 a donné naissance à la première entreprise de vente d'informations financières en 1841 à New York, à savoir "The Mercantile Agency." Elle répondait à un besoin d'information des investisseurs quant à la solvabilité des entreprises. Le développement du secteur de la notation financière[2] va de pair avec celui du marché financier.

Parmi les agences de notation financière, deux sont issues des entreprises américaines : Standard and Poor's et Moody's qui se sont d'abord affirmées sur le marché domestique américain avant de se développer dans les années 70 sur le marché international. En s'établissant dans les différentes places boursières telles que Londres, Tokyo, Sydney et Paris, elles ont acquis l'avantage de mieux connaitre les sociétés étrangères qui émettent sur le marché américain. Ces deux facteurs leur permettent d'obtenir des études approfondies et d'améliorer la fiabilité de leurs évaluations. Ainsi, elles se démarquent des agences nationales dans plusieurs pays par l'indépendance supposée de leurs activités et s'imposent désormais aux différents marchés, comme les institutions de référence en ce qui concerne les appréciations de la qualité de crédit auprès des établissements de crédit et des investisseurs.

[1] Cette partie s'intéresse exclusivement aux entreprises.

[2] Les facteurs de développement du métier de la notation financière : la modernisation de la place financière, l'instauration de nouveaux instruments, l'ouverture plus grande des marchés financiers domestiques aux investisseurs étrangers.

La notation proprement dite est une appréciation de la qualité de crédit quant à la capacité et à la volonté des entités à faire face à leurs engagements financiers notamment le paiement du capital et des intérêts sur les crédits. Ces notations sont formalisées selon les méthodologies des trois agences (l'agence Fitch Ratings se rajoutant aux deux premières précédemment citées) mais le point commun qu'elles présentent est qu'elles permettent aux investisseurs d'opérer des choix en fonction des risques attachés aux diverses émissions. Cette démarche est essentielle puisqu'elle apporte le gage de transparence quant à la situation financière des entreprises.

Nous n'allons pas aborder, dans cette section introductive, de façon détaillée les méthodologies des agences de notation pour l'attribution des notes mais rappeler le lien entre la notation financière et les risque de crédit des entreprises. Comme nous venons de le rappeler plus haut, deux types de financement [3] sont utilisés par les entreprises : financements réalisés par des crédits auprès des banques, d'une part, pour leurs besoins de trésorerie (crédits de trésorerie) et pour leurs développements avec des investissements à court et long terme, et d'autre part, financements par émission d'actions ou d'obligations sur les marchés financiers (levées de fonds). Que ce soit auprès des banques ou des marchés financiers, les entreprises sont soumises aux contraintes de détention de fonds propres avec les règlementations sur leur solvabilité et aussi à l'indispensable activité d'évaluation du risque de crédit via la notation financière.

Les demandes de financement auprès des banques peuvent être évaluées par une méthodologie employée en interne par les banques : le scoring. Cette méthode est basée sur l'analyse financière comme la notation financière réalisée par les agences de notation. La différence entre les deux méthodes s'explique par leurs finalités distinctes : le score s'adresse en dernier ressort aux actionnaires de l'établissement financier ; la notation financière s'adresse quant à elle directement aux investisseurs et aux prêteurs. En outre, la notation financière a accès aux informations confidentielles et leurs publications ne constituent pas des recommandations directes alors que la méthodologie de scoring est destinée à fournir des recommandations aux actionnaires sur des opérations de titres de propriété.

Pour les entreprises en particulier, les agences de notation, en publiant des notes, donnent leurs appréciations sur la qualité de crédit et dressent des perspectives de la situation financière des entreprises. Diverses notations s'adaptent aux situations des entreprises. Parfois, une notation appelée "sauvage" peut être menée sans l'aval de l'entreprise notée. Cependant, une demande de notation d'une entreprise auprès d'une agence de notation suppose sa collaboration totale quant à la fiabilité des informations comptables et financières servant à fournir la source de données de l'évaluation. La notation financière constituant

[3]Le financement de développement des entreprises par des politiques d'autofinancement consistant à réinvestir des bénéfices non distribués dans l'entreprise ne fait pas l'objet de notre étude.

la référence en matière de risque de crédit, les investisseurs formulent leurs anticipations sur la base des publications des agences.

Les notes publiées peuvent se fonder sur les informations officielles notamment les diverses émissions, sur l'entité notée ou les contextes dans lesquels les notes ont été établies mais aussi sur des informations confidentielles sur les performances futures ou les projets divers des émetteurs. Ces différentes informations peuvent être obtenues à l'issue des entretiens avec les différents interlocuteurs des entreprises.

Qu'il s'agisse de Standard and Poor's, de Moody's Investors ou de Fitch Ratings, les notations sont établies sur des échéances à court terme et à long terme. Les échelles de notation utilisées par les agences de notation sont scindées en deux catégories d'échelles de notation à long terme et à court terme : la catégorie d'investissement et la catégorie spéculative.

La catégorie d'investissement dont les notes varient de AAA à BBB (Standard & Poor's) est celle la moins risquée en termes de perspectives futures par rapport à la catégorie de spéculation. Cette dernière dont les notes varient de BB à D regroupe des émissions dont le remboursement du capital et d'intérêt est plus aléatoire puisqu'il dépend des conditions externes de l'entité notée.

La mise sous surveillance d'une note est indiquée par des commentaires additionnels associés à la note. Ces indices sont attribués lors de la manifestation d'un événement particulier susceptible d'apporter des modifications de la note dans un horizon donné. Notons que la surveillance peut avoir une implication positive, négative ou indéterminée selon que la nature de l'événement survenu le permette.

L'impact de la notation financière se matérialise simplement au moment de l'émission de crédit sur le marché. Le risque de crédit se concrétise sous la forme d'un spread de crédit qui est sensé refléter les anticipations des investisseurs quant aux conditions de détention du titre émis. En effet, les investisseurs anticipent le risque de perte ou non de ces investissements. En règle générale, l'aversion au risque pour la détention d'un titre est telle que les investisseurs exigent une rémunération en compensation du risque encouru par la détention du titre ayant obtenu une notation inférieure. La perspective du risque est aussi un facteur déterminant dans le comportement des investisseurs. Concrètement, un investisseur consentira à investir dans une émission avec une notation inférieure que moyennant le paiement d'une rémunération en un taux d'intérêt plus élevé incluant une prime de risque couvrant le risque de perte.

Enfin, il faut noter le caractère unanime du recours à la notation par tous les acteurs économiques. Ainsi, l'étude réalisée en 2004 par la Banque de France[4] à propos de l'incidence de la notation sur les dynamiques de marché souligne que « l'influence des opinions émises par les agences de notation sur les marchés s'est considérablement accrue au cours des dernières années ». Selon cette

[4]Voir Gonzales *et al.* (2004).

étude, tous les acteurs économiques, qu'il s'agisse des banques, des régulateurs, des détenteurs d'obligations, ou des administrations de fonds de pension... ont recours d'une manière croissante aux critères d'évaluation fondés sur la notation financière.

Les agences de notation accordent une importance particulière à la fiabilité des informations servant à établir des notes. Pourtant toute une série de crises ayant déclenché des scandales financiers n'ont pas été vraiment anticipés par les agences de notation. Des exemples de scandale dans lesquels la responsabilité des agences a été remise en cause sont nombreux. En 2001, les deux grandes agences de notation, Standard and Poor's et Moody's Investors ont noté la Société Enron dans la catégorie la moins risquée (« catégorie d'investissement ») à tort puisque cette société s'est déclarée en faillite quelques jours seulement après l'attribution de cette note. La crise récente des subprimes de 2008, devenue mondiale, a illustré le fait que des placements sur des crédits finalement « pourris » ont reçu durant plusieurs années la meilleure notation des trois agences principales de notation. Les conséquences en ont été quasiment sans précédent.

Ainsi, les caractères d'indépendance et de responsabilité des agences de notation se trouvent-t-'ils remis en cause par les impacts des notes sur le rationnement des crédits sur les marchés financiers. D'autres exemples récents viennent s'ajouter aux "palmarès" des agences : le cas des états souverains, notamment lors de la crise grecque ou lors de l'abaissement de notes des Etats-Unis et les perspectives négatives sur l'Espagne et le Portugal.

Les échelles de notation en catégorie spéculative (risquée) et d'investissement (pas risquée) permettent non seulement d'attribuer les notes à une classe donnée mais permettent également de suivre les perspectives négatives ou positives. Pour tout changement qui a un impact sur le devenir de l'entreprise ou sur les conditions dans lesquelles elle évolue (crise par exemple du pays où elle est implantée), une modification de l'appréciation s'en suivra. Nous venons de voir précédemment que les crises (les contextes économique et financier de manière plus générale) ont un impact direct sur la pondération. Les perspectives de la situation d'une entreprise évoluant dans un environnement risqué seront vraisemblablement plus négatives et l'adaptation de la note s'en suivra. Cela se matérialise par le relèvement du taux d'intérêt lié à toute émission dans ces conditions. La publication des notes dicte les comportements des investissements sur les diverses émissions.

Etant donné que les investisseurs se fient aux notations des agences, il est sans doute prévisible qu'ils exigent des rémunérations ("les spreads") compensant les risques encourus à travers un taux d'intérêt élevé. Les études sur les relèvements des taux d'intérêt sur les émissions de crédit des entreprises suite aux crises financières sont nombreuses. La crise constituant en soi un facteur de risque est donc concomitante aux changements de notes. Elle a d'autre part illustré crucialement le risque de contagion entre différentes catégories d'obligations avec risque de défaut ou de produits structurés de crédit (se différentiant

notamment par leurs niveaux de risque, leurs origines géographiques et leurs secteurs d'activité).

La relation entre les changements de note et l'anticipation de la probabilité de défaut (spread) est une problématique développée dans le cadre de cette thèse. Evaluer le risque de crédit d'une créance revient à déterminer le prix de sa dette. Les premières études pour la modélisation du défaut ont été développées par Merton dans les années 70. Il s'agit des modèles structurels qui se basent sur la valeur de l'entreprise et le niveau de la dette correspondant aux émissions. Par ailleurs, pour l'approche à intensité, on ne modélise que la probabilité de défaut. Il est possible de compléter les modèles à intensité en les reliant à des facteurs spécifiques tels que la conjoncture économique, le secteur d'activité, la zone géographique... Ces facteurs peuvent être observables (voir Wilson, 1997) et peuvent aussi être supposés non observables (voir Belkin et Forest, 1998).

Pour tenter de répondre aux questions soulevées par le risque de crédit et la notation des obligations, cette thèse comprend cinq chapitres :

Le premier chapitre est une présentation générale du risque de crédit et de la notation. Nous nous intéressons à définir dans un premier temps le risque de crédit. Nous présentons ensuite les différents modèles existants pour modéliser ce risque, tout en essayant de mettre l'accent sur les limites de chacun des modèles. Dans une seconde section, nous nous penchons sur le concept de notation de crédit, en présentant en particulier quelques éléments de son processus ainsi que les échelles de notation des agences leaders, en l'occurrence Standard and Poor's, Moody's et Fitch. Nous mettons l'accent sur la distinction entre grade d'investissement et grade spéculatif. Enfin, nous nous intéressons aux différents champs d'application de la notation. Ce chapitre constitue donc une introduction à toutes les notions utilisées par la suite.

Le deuxième chapitre vise à présenter les aspects techniques liés à la modélisation du risque de défaut ou de changement de note. Pour cela, nous rappelons la notion fondamentale de processus ponctuel marqué, outil indispensable à la mise en place d'une modélisation précise du risque de crédit. Nous montrons en quoi elle peut être appliquée au risque de crédit, notamment dans la calibration des spreads de défaut lorque l'on adopte l'approche dite "à intensité." Nous développons également la notion de matrice de transition, élément clef pour suivre le processus de changement de note au cours du temps.

Le troisième chapitre[5] traite et modélise essentiellement les parcours de notation des firmes en utilisant les modèles de durée de type *Autoregressive*

[5]Ce chapitre a donné lieu à un article intitulé "Modèles ACD pour la migration des notes de crédit". Il a été présenté à la conférence internationale IFC 5 (Hammamet, 2009) ainsi qu'aux Journées de Microéconomie 2010 (Poitiers, Mai 2010).

Conditional Duration (ACD). Utilisant entre autres les lois de Burr pour décrire les lois de probabilité des durées entre deux changements consécutifs de note, nous montrons de manière très précise comment les changements de notation sont reliés aux durées d'attribution de deux notes consécutives. Nous illustrons ces liens en étudiant notamment les fonctions de hasard associées au processus de changement de note. Nous examinons entre autres comment l'ordre des épisodes de notation influent sur la relation entre le changement de note et la durée nécessaire à ce changement.

Le quatrième chapitre[6] expose l'effet de la crise sur l'épisode de notation de chaque firme, tout en mettant l'accent sur la modélisation de la durée ainsi que celle des changements de note. A travers notre modèle, nous illustrons que les épisodes de notation, considérés avant et après la crise, montrent l'accélération du processus de changement de la note (révision à la baisse notamment). Nous nous basons pour cela sur la méthodologie (ACD) en introduisant une variable latente non observable, ceci dans le but de capter l'effet de la crise sur le processus de notation des firmes. Ce facteur latent inobservable nous permet d'estimer les probabilités à posteriori d'appartenance à des groupes de référence qui se distinguent par la durée moyenne de notation et par la direction de la note. Via un modèle probit ordonné, nous montrons en particulier que les épisodes de notation considérés après la crise ont tendance à appartenir au groupe caractérisé par une durée plus courte et un abaissement de la note.

Le cinquième chapitre[7] vise à modéliser l'effet de contagion dans le cadre de la crise financière, en utilisant des processus de type "self-exciting" et "mutual-exciting" pour estimer les lois des instants de défaut, en présence de phénomènes de dépendance entre différentes catégories d'obligations (niveaux de risque, origines géographiques, secteurs d'activité). Nous établissons des formules générales pour la détermination des prix de dérivés de crédit dans un contexte de contagion. En nous basant sur les résultats des chapitres 3 et 4, nous pouvons évaluer les risques associés à une baisse généralisée des notes.

[6]Ce chapitre a donné lieu à un article intitulé "The crisis impact on the rating migration".

[7]Ce chapitre a donné lieu à un article intitulé "Contagion of rating changes : application to the valuation of CDS and CDOs".

Il a été présenté à la conférence internationale IFC 6 (Tunis, 2011).

CHAPITRE 1

Principes généraux du risque de crédit et de la notation

1. Introduction

La gestion des risques de crédit représente une activité économique très importante. Elle permet de déterminer les liens entre les emprunteurs, les prêteurs et les investisseurs, en évaluant le risque de ces derniers. L'activité de crédit met la banque en risque de contrepartie car le risque de crédit représente la probabilité de pertes dûe au défaut de l'un de ses emprunteurs face à la détérioration de sa situation financière. Pour ce faire, la gestion des risques couvre aujourd'hui toutes les techniques pour mesurer et contrôler les différentes sources de risque. De nombreux facteurs ont contribué à la progression de la gestion du risque de crédit. Tout d'abord, les établissements financiers se basent de plus en plus sur les critères de performance par rapport à l'analyse du risque crédit et ils subissent beaucoup de pressions afin d'améliorer leurs performances financières en terme d'anticipation des risques de défaut. Ces pressions ont conduit les banques à s'orienter vers les nouveaux marchés, afin de mieux gérer leur risque de portefeuille en ayant plus de liquidité.

Pour répondre à toutes les questions qui se posent concernant la qualité de crédit des émetteurs de titres, les analystes financiers ont développé un système basé sur l'évaluation du risque de contrepartie par la notation financière. Par exemple, depuis quelques années, les investisseurs acceptent de prêter ou non de l'argent à un Etat à condition qu'ils aient une visibilité sur sa solvabilité. Pour ce faire, ils se tournent vers les agences de notation pour avoir leur avis sur la question.

Nous allons essayer dans ce chapitre d'exposer dans un premier temps le risque de crédit, le risque fondamental comme illustré récemment par la crise financière et économique. De plus, nous rappelons brièvement les trois méthodes principales d'évaluation du risque de crédit et évoquons la notion de *Collaterized Debt Obligation* (CDO).

Puis, nous décrivons succinctement les différentes étapes du processus de notation afin de comprendre les principales motivations de l'apparition de cette pratique. Nous présentons les trois agences leaders ainsi que leurs échelles de notation et ce afin de mieux cerner la significativité de chaque note. Nous définissons le principe de la notation financière et rappelons également les principaux événements qui ont contribué au développement de la notation. Finalement, nous nous intéressons aux différents champs d'applications de la notation, à savoir, la notation des émetteurs et la notation des émissions.

2. Généralités sur le risque de crédit

Qui dit risque de crédit dit soit le risque de survenance de pertes consécutives au défaut d'un emprunteur face aux dettes qu'il a contracté, soit au risque de perte dues à la détérioration de la situation financière d'une entreprise. Nous distinguons deux catégories principales de risque de crédit :

- La première correspond au risque de défaillance d'un emprunteur se trouvant dans l'incapacité d'honorer ses engagements à l'échéance sur sa dette ;
- La seconde est celle inhérente à la détérioration de la qualité de crédit par des institutions financière notamment les agences de notation. En d'autres termes ce risque lié au crédit, peut être décomposé en trois risques :

* Risque émetteur : C'est le risqué lié aux émissions d'obligations, des billets de trésorerie ou de certificats de dépôts.

* Risque de défaut ou de dégradation : c'est le risque qui correspond au non réglement de la dette à son échéance, le risque de défaut et le risque de dégradation sont liés car la détérioration de la qualité de crédit pourrait dans certains cas entrainer une défaillance. On peut dire qu'un débiteur est en situation de défaut lorsqu'il y a un retard de paiement des intérêts et du principal ou bien lorsqu'il y a une dégradation de sa qualité de crédit, et dans la pire des situations lorsque celui-ci fait faillite.

* Risque de contrepartie : c'est le risque sur des pertes possibles sur une contrepartie, il peut s'agir d'un retard éventuel de paiement du débiteur qui ne dispose pas de fond nécéssaire pour régler à temps ses dettes.

Ainsi on peut différencier entre deux types de pertes découlant de ces types de risque, les pertes anticipées et les pertes non anticipées :

- Les pertes anticipées sont représentées par le montant d'un crédit qu'une institution financière aurait effectivement perdues en cas de défaut de paiement de l'un de ces clients. En d'autres termes, c'est une estimation de l'espérence des pertes futures calculées sur la base des probabilités de défaut.
- Les pertes non anticipées sont représentées par des pertes réalisées suite à la manifestation d'événements imprévus. Dans ce cas, les modèles de risque de crédit tendent à estimer le montant maximal de ces pertes.

L'activité des établissements financiers dépend fortement de l'appréciation du risque de crédit et de défaut. De divers modèles tentent de mieux maîtriser et gérer ce risque de défaut et surtout de l'anticiper ; on peut citer comme exemple, les modèles de Merton (1974) et les modèles d'intensité qu'on verra par la suite.

2.1. Gestion du risque de crédit.

La mesure et la gestion des risques, permettent de mieux contrôler la solidité financière des établissements de crédit, elles ont pour objectif l'optimisation des performances et le contrôle du risque lié à la contrepartie. De ce fait il existe plusieurs méthodes quantitatives et qualitatives considérées comme des techniques traditionnelles pour évaluer et mesurer le risque de crédit.

Généralement les banques utilisent l'approche quantitative ou "scoring" mais dans certains cas, pour compléter leur analyse, ils utilisent l'approche qualitative. Cette approche est basée sur des sources d'informations confidentielles et sur un jugement personnel basé sur l'expérience du banquier. L'approche qualitative nécessite une connaissance parfaite de la clientèle pour mieux la contrôler et pour mieux évaluer son risque.

La méthode quantitative ou de "scoring" est la méthode la plus utilisée pour détecter les difficultés des entreprises en se basant sur des données historiques. Elle est considérée comme un moyen d'aide à la prise de décision, elle a pour but de quantifier, de mesurer et d'estimer le risque par des méthodes mathématiques et statistiques, tels que les modèles probit et logit qui évaluent le défaut de la contrepartie et les modèles d'analyse discriminante.

Cette méthode « scoring » a été introduite par Altman (1968), il a mis au point la première fonction score, à partir de l'utilisation d'une analyse discriminante multi variée. Il suppose que les informations comptables donnent des informations prédictives sur la probabilité de défaut d'une entreprise comprise entre 0% et 100% sur une échelle continue. Son principe consiste donc à distinguer les entreprises qui ont fait faillite de celle qui ne le sont pas.

Pour construire un modèle de score, il faut disposer de deux groupes d'entreprises . Le premier regroupe les entreprises défaillantes et le second regroupe les entreprises non défaillantes. Il est donc nécessaire de choisir un critère de défaut. Sur ce point, on peut considérer plusieurs indicateurs qui dépendent de l'objectif de l'étude. Des modèles logit par exemple peuvent attribuer la valeur « 0 » dans le cas ou l'entreprise a connu des difficultés financières et 1 sinon.

Un modèle de score performent, est un modèle qui donne de bons scores aux entreprises solvables et des scores faibles aux entreprises non solvables. Les modèles de score doivent donc améliorer la qualité de l'information et prévoir la probabilité de pertes potentielles.

2.2. Les différents modèles pour l'analyse du risque de crédit.

La mise en place d'un modèle de risque de crédit repose sur deux aspects : La construction de groupes de référence qui sont classés selon le niveau de risque en déterminant pour chaque classe la probabilité de défaut et le montant des pertes en étudiant la solvabilité de chaque institution financière et la modélisation de la probabilité des pertes et le calcul du risque encouru en

faisant référence à des modèles économétriques qui consistent à mesurer et à modéliser la probabilité de défaillance qui a un impact directe sur la situation financière des entreprises.

Il existe dans ce cadre trois types de méthodes pour mesurer le risque de crédit de contrepartie, les méthodes structurelles présentées par le modèle de Merton (structural models), les modèles à intensité (reduced form models) et les modèles en termes de note connus sous le nom de rating.

L'intérêt de tous ces modèles est la maîtrise de l'évaluation du risque de crédit, ce sont des modèles qui vont aider à voir plus clair sur la situation financière des institutions financières. Cependant malgré les avantages découlant de ses approches , il y a une complexité et des limites qui restent toujours présentes. C'est pourquoi, les demandes de crédit doivent faire l'objet d'une analyse rigoureuse. La méthode d'analyse de crédit doit être une priorité que ce soit en période de prospérité qu'en période de crise. On va présenter dans ce qui suit la définition de ces trois modèles.

2.2.1. *Approche structurelle.*

Les modèles structurels ont été développés par Merton en 1974, ils se basent sur la structure de capital de l'entreprise. La faillite de l'entreprise est présentée comme un processus lié à sa structure de capital. Les actions et les obligations émises par une entreprise se présentent comme des options dont on peut évaluer le prix.

Lorsqu'on est dans un marché d'option, le profil du détenteur de l'action de l'entreprise est le même que celui d'un détenteur de call. Donc si une firme donnée fait défaut ça veut dire que la valeur de son actif est devenue inférieure à la valeur de ses dettes.

Cependant, cette approche a des limites. En effet elle suppose que la faillite ou le défaut d'une entreprise ne se produisent qu'à l'échéance, elle suppose aussi que la valeur de la firme est une combinaison de la valeur de marché des actions et la valeur de marché de la dette, il est donc difficile d'en donner une estimation. C'est aussi un modèle qui n'est pas adapté à l'évaluation des dérivés de crédit car le calibrage sur les données de marché n'est pas assez direct.

C'est dans ce cadre que Zhou (1997), a développé une approche dans laquelle le défaut peut intervenir à n'importe quel moment et non à l'échéance comme dans le modèle de Merton. On peut citer aussi les travaux de Black et Cox (1976), qui ont définit un seuil au-dessous duquel l'entreprise se déclare en faillite. On verra par la suite dans le chapitre 2, plus en détails, les inconvénients de ce modèle.

2.2.2. *Approche intensité.*

Dans les modèles à intensité, le défaut est lié à plusieurs facteurs tels que le taux de chômage, le taux d'accroissement du PIB, le taux d'intérêt à long terme, etc ... et non seulement à la valeur de la firme. La probabilité de défaut varie dans le temps. Le défaut est modélisé comme un processus ayant une intensité contrairement aux modèles structurels où le défaut ne peut pas survenir par surprise car la valeur de marché des actifs est supposée suivre un processus continu.

Dans cette apprcohe on peut distinguer deux modèles performants : CreditRisk+ (développé par le crédit suisse) et Credit portfolio View (développé par Mc Kinsey). Dans le premier modèle, ils utilisent un processus de Poisson pour modéliser le défaut. Dans le second, ils cherchent aussi à modéliser le défaut, mais en se basant sur des facteurs macro-économiques. Ces deux approches ont pour but d'anticiper les défaillances et de mesurer les risques encourus.

– CreditRisk+ de Crédit Suisse :

CreditRisk+ est un modèle développé par Crédit Suisse First Boston en 1997. C'est un modèle à intensité qui, contrairement aux modèles structurels, ne cherche pas les causes de la défaillance d'une entreprise, il ne s'intéresse qu'à la probabilité de défaut, sans tenir compte des conséquences d'une détérioration de la qualité de la contrepartie. La probabilité de défaut d'une contrepartie est estimée à partir des prix de marché des obligations et des actions, qui reflètent les anticipations des investisseurs quant à la qualité de la contrepartie.

Ce modèle présente quelques avantages tels que le nombre de paramètres réduit ainsi que la présence de deux états possibles seulement, à savoir défaillance ou pas de défaillance. Parmi les inconvénients, on trouve par exemple le fait qu'il ne tient pas compte de la perte ou du gain de valeur du portefeuille suite à des changements de note et les taux d'intérêt sont supposés constants.

– Credit Portfolio View de Mc Kinsey :

Dans cette approche, la probabilité de défaut est liée à l'évolution des variables macro-économiques. Le modèle tient compte à la fois de la probabilité de défaut et de la probabilité de migration de l'environnement économique. Il modélise les pertes d'un portefeuille, en fonction d'un risque systémique, calculées sur de nombreuses années qui ne représente pas la position de l'économie dans le cycle de croissance.

Dans cette approche, par intensité le défaut d'une entreprise est modélisé comme un processus ayant une intensité, c'est à dire un taux instantané d'occurrence. Il est considéré comme un événement qui ne peut pas être lu dans les prix.

2.2.3. *Approche en termes de note.*

– La notation :

La seconde approche se base sur les études réalisées par les agences de notation comme Moody's, Standard & Poor's et Fitch Ratings. Son objectif est de renseigner les investisseurs sur la solvabilité des compagnies, autrement dit sur leurs capacités à rembourser les emprunts contractés. L'activité de notation permet donc de réduire l'asymétrie d'information entre celui qui emprunte et celui qui prête. Pour ce cela, elles doivent, modéliser le risque de crédit à partir des comptes publiés, analyser les opérations de marché, suivre les créances douteuses et enfin elles doivent suivre l'évolution de l'environnement dans lequel se trouve l'entreprise ainsi que ses facteurs internes.

Le processus de notation est complexe et propre à chaque agence de notation, il se base sur plusieurs critères, qui se décomposent eux-mêmes en sous-critères, qu'il convient d'estimer et de pondérer à l'aide d'un modèle mathématique de notation. Chaque agence possède son propre système de notation, toutefois on peut voir les grandes lignes :

-La première étape pour l'attribution d'une note consiste à étudier la stratégie d'une entreprise par exemple, ainsi que de son environnement. Ensuite les agences de notation la positionnent dans une échelle graduée des risques sur laquelle elles disposent des différentes notes attribuées. Une mauvaise note traduit une mauvaise situation financière et donc une incapacité, et les risques sont élevés . A l'inverse, une bonne note traduit une bonne situation financière ce qui signifie que la stratégie menée par cet acteur participe à l'amélioration du bien-être collectif. Dans cette première étape les agences de notation analysent aussi les documents financiers ainsi que les risques liés à la structure du financement. La notation financière se base donc sur des données quantitatives qu'elle modélise à l'aide d'outils statistiques et mathématiques afin d'évaluer le risque de défaut et de changement de note.

-La seconde étape consiste à analyser les données et les notes attribuées dans un rapport présenté au "comité de notation".

-Troisième et dernière étape consiste à communiquer cette notation finale au marché financer si l'émetteur ne s'y oppose pas. Par la suite, le rôle de l'agence est de surveiller l'évolution des entreprises sur le marché mais aussi surveiller de tous les événements qui peuvent affecter la note. Cette surveillance permet de prendre en compte dans les notes, les changements de la situation des entreprises ou des événements entrainant le rehaussement ou l'abaissement de la note.

– Matrice de transition :

La matrice de transition permet de déterminer et d'estimer la probabilité de défaut ou de changement de note d'un établissement financier au cours du temps. La lecture d'une matrice de transition renseigne sur une ou plusieurs années la qualité de crédit d'un emprunteur.

La migration de crédit se fait soit dans le sens d'une amélioration de la note soit dans le cas contraire d'une dépréciation de la qualité de la note .Dans un marché financier le changement de note d'un titre de crédit sera accompagné d'un changement de prix.

Ces probabilités de défaut estimées représentent une étape importante dans les modèles de crédit .on peut les utiliser par exemple pour la détermination des prix des CDO.

2.3. Titrisation du risque de crédit et dérivés de crédit.

2.3.1. *Les principales caractéristiques de la titrisation.*

La titrisation est une opération financière qui consiste à transformer les actifs en titres financiers négociables et liquides, le plus souvent des créances. Les actifs concernés sont assez variés et les plus courants sont les créances hypothécaires sur des particuliers, les prêts immobiliers accordés à des particuliers à la solvabilité douteuse, les créances hypothécaires sur des entreprises, les crédits bancaires aux entreprises, les prêts étudiants (principalement aux Etats-Unis), les encours de cartes de crédit.

Les caractéristiques des titres négociables peuvent être différentes de celles des actifs sous-jacents en terme de paiements, de coupons, de durée et de sensibilité aux fluctuations des taux d'intérêt. Le mécanisme d'une titrisation est une opération complexe qui dépend de plusieurs acteurs. Le schéma ci-dessous réalisé par François Leroux 1 , illustre le mécanisme de base de création des titres et de transfert de risque :

- L'arrangeur : généralement il s'agit des banques d'affaires ou bien d'une maison de titres spécialisée. Son rôle est celui d'améliorer la notation moyenne des titres émis mais aussi d'essayer d'attirer les cédants. Pour faire face aux besoins de financement de leurs clients cédants ils utilisent des ABCP ("Asset-Backed Commercial Paper).

- Le cédant : c'est soit une banque, une entreprise ou un établissement de crédits agissant pour son propre compte, son rôle est celui de céder les actifs et de transférer les risques. Il surveille l'exécution des cessions de créances et assurent le recouvrement des créances.

- La société de gestion : C'est une société qui gère le SPV et qui représente les intérêts des détenteurs de parts, son rôle est de veiller à la rémunération des investisseurs et au respect de la documentation juridique de la transaction. Rémunérée pour ses services, la société de gestion peut bénéficier du placement temporaire des fonds collectés jusqu'à leur transfert.

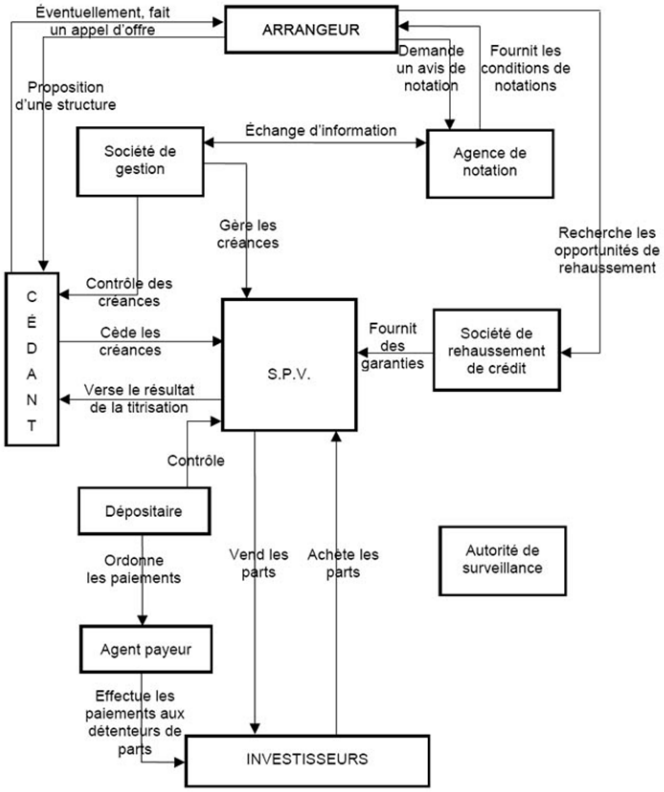
- L'agence de notation : le rôle d'une agence de notation est important, elle évalue les capacités et la qualité des actifs sous-jacents. L'agence de notation aide les investisseurs à voir clair par rapport au degré du risque associé aux titres émis. Ses conclusions aident à déterminer le degré de rehaussement de crédit.
- Société de rehaussement de crédit : Elle intervient en tant que garant. La décision de faire intervenir un rehausseur dans une opération dépendra de la qualité des titres cédés au SPV et de la qualité des investisseurs.
- SPV : le SPV (Special Purpose Vehicle) elle émet des titres financiers, ensuite ces titres sont évalués par une agence de notation pour connaitre le degré du risque associé à chaque titre après il les place auprès des investisseurs.
- Dépositaire : Le dépositaire contrôle les décisions de la société de gestion, pour cela, il doit évaluer les caractéristiques des titres à émettre, la structuration éventuelle du fonds et veiller à la distribution des paiements aux investisseurs.
- Agent payeur : Il est chargé de veiller à la distribution des paiements aux investisseurs et aux détenteurs de parts.
- Les investisseurs : Les investisseurs dans ce type de produits sont généralement les investisseurs institutionnels tels que les assurances ou bien des OPCVM, pour les tranches "senior". Pour les tranches "equity" sont souscrites par des investisseurs plus spécialisés.

On distingue deux types de titrisation :
*La titrisation classique : où les créances sont cédées au SPV.
*La titrisation synthétique : où le cédant reste propriétaire des créances mais n'en cède que les risques au SPV, à travers les dérivés de crédit. Dans ce type de titrisation le cédant va juste transmettre les risques à travers les actifs titrisés.

Parmi les avantages de la titrisation, la banque ou l'entreprise peut se débarrasser de ces créances en allégeant son bilan et en facilitant la rentrer des liquides. Pour les investisseurs, la titrisation leur permet d'investir dans une classe d'actifs qui n'est pas disponible sur le marché et de leurs offrir une gamme large d'actifs.

Parmi les inconvénients de la titrisation on retrouve l'asymétrie d'information. En effet l'émetteur des titres sait beaucoup plus que l'acheteur. Mais aussi, comme la titrisation offre aux banques une opportunité d'alléger leurs bilans, les organismes de crédit sont devenus moins regardant sur la qualité des emprunteurs ; les banques ont de plus en plus abondonné leur rôle de financement de l'économie et se sont concentrées sur leur rôle d'intermédiaire dans l'économie.

FIG. 1. Mécanisme de la titrisation



Source : Note pédagogique MIC no 16 François Leroux

2.3.2. *Les dérivés de crédit : les CDO (Collateralized Debt Obligation).*

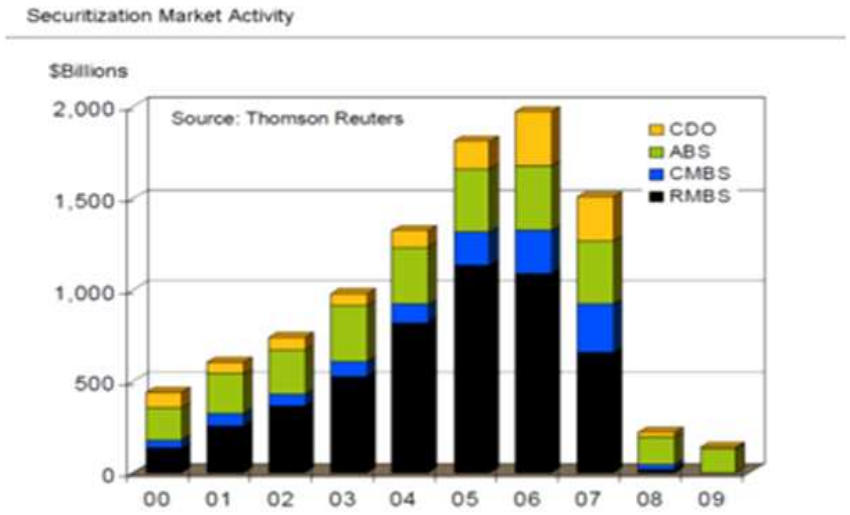
Parmi les dérivés de crédit traités sur les marchés financiers, on distingue les *Collateralized Debt Obligation* (CDO) qui sont des contrats financiers dont la principale caractéristique est la titrisation du risque de crédit relatif à un actif sous jacent. Ces CDO ont vu le jour à la fin des années 80 aux États-unis. La société d'investissement Drexel Burnham Lambert a créé les CDO et depuis, le marché des CDO n'a cessé de s'élargir notamment en Europe.

Selon les données de l'AMF, le marché européen de la titrisation a atteint en 2006 un volume d'émission d'environ 2000 milliards d'euros, les CDO représentaient environ 20% soit plus de 400 milliards d'euros.

Les CDO sont des titres représentatifs de portefeuilles de créances bancaires émis par une structure ad-hoc, appelé véhicule de titrisation (SPV), qui achète et détient des obligations émises par des entreprises ou des banques.

Les CDO peuvent être émis selon différentes tranches avec diverses caractéristiques de risque à partir d'un portefeuille d'instrument de dettes, c'est une manière de créer des dettes de haute qualité à faible qualité.

FIG. 2. Evolution du marché des CDO



Source : Thomson Reuters

Les actifs sont détenus sous forme de tranches et se répartissent selon leur niveau de risque :

- La première tranche, "equity" : les investisseurs assument les premières pertes, en contrepartie ils reçoivent un coupon plus spread plus élevé.

- La deuxième tranche, "mezzanine" : les investisseurs sont payés avant ceux de la tranche equity.

- La troisième tranche, "senior" : les investisseurs reçoivent les premiers flux versés par les obligations, la tranche senior n'est affectée par la perte que si le défaut s'avère plus important.

On peut différencier les CDO selon la nature de leurs actifs sous-jacents, on distingue les CDO de bilan et les CDO d'arbitrage :

– Les CDO de bilan :

Ils correspondent à la titrisation des éléments présents dans l'actif du bilan du cédant, comme les prêts bancaires et les obligations privées. Le cédant est une institution financière qui cherche à optimiser son portefeuille de dettes.

– Les CDO d'arbitrage :

Contrairement au CDO de bilan, le porte-feuille sous jacent peut être composé de produits financiers présents sur le marché ce qui offre une liquidité plus importante. Ils correspondent à l'écart entre le rendement du portefeuille sous-jacent et la rémunération minimum offerte aux souscripteurs des tranches. C'est-à-dire que le prix de vente est plus avantageux que le prix d'achat de l'actif sous-jacent.

- Les CDO de flux :

Qu'ils s'agissent des CDO de bilan ou des CDO d'arbitrage, le transfert du risque de crédit du portefeuille se fait lorsque la banque cède à un SPV un portefeuille de prêts commerciaux. On l'appelle l'opération de « true sale ».

- Les CDO synthétiques :

Pour les CDO synthétiques le transfert de risque de crédit du portefeuille de référence se fait par le biais de swaps de défaut selon laquelle le créateur vend une protection à l'initiateur du montage et reçoit périodiquement une prime en contrepartie.

3. La notation de crédit

Afin de mieux cerner l'activité de notation, il convient de s'interroger sur son processus de notation, les critères de notation et les champs d'application de cette activité.

3.1. Parcours de notation des firmes.

3.1.1. *Définition de la notation.*

La notation est l'appréciation, en temps et en heure, du risque de solvabilité financière d'une entreprise, d'un État (notation souveraine) ou d'une autre collectivité publique, nationale ou locale et d'une opération (emprunt, emprunt obligataire, opération de financement structurée, titrisation, etc.).Cette appréciation est traduite par l'attribution d'une note correspondant aux perspectives de remboursement de ses engagements envers ses créanciers - fournisseurs, banques, détenteurs d'obligations, etc...

La notation est réalisée moyennant des outils d'évaluation qui ne prennent tout leur sens que lorsqu'ils sont intégrés dans une méthodologie rigoureuse d'analyse financière du risque de crédit. Parmi ces outils d'évaluation, peuvent être cité : l'analyse statistique de données historiques de défaillance ou de défaut, le suivi des différentiels de taux pour les prêts aux entreprises, l'appel aux avis d'experts éventuellement intégrés dans un système expert.

La notation financière, ou rating, constitue, pour les investisseurs, un critère clé dans l'estimation du risque qu'un investissement comporte, particulièrement dans le cadre de marchés financiers de plus en plus globaux qui rendent difficile la maîtrise de l'information et donc de tous les paramètres de risque. C'est même un des critères obligatoires pour les emprunteurs institutionnels (fonds de pension, collectivités territoriales, etc.) dont les statuts précisent un niveau de notation minimal pour leurs investissements.

L'introduction de la notation en France remonte à 1975 par la Caisse Nationale des Télécommunications. Mais le rating en tant que tel ne connait véritablement son essor qu'au cours des années 80, notamment avec le développement d'un marché de titre de créances négociables (billets de trésorerie,

certificats de dépôts, etc.). La mission d'effectuer l'analyse financière nécessaire et d'attribuer la note est confiée à des agences de notation financière. Les trois plus grandes agences de notation sont américaines « The Big Three » (les trois grandes) à savoir Standard & Poor's (1860) et Moody's'1909 détiennent chacune 40% du marché et Fitch Ratings 14% (Toutefois Duff&Phelps a été absorbé par Fitch, dont le capital est détenu par le groupe français FIMALAC, devenu Fitch Ratings). Elles réalisent 94 % du chiffre d'affaires de la profession.

3.1.2. *Processus de la notation.*

Le processus de notation est spécifique pour chaque agence .Ce processus peut être articulé autour de six principales étapes communes, à savoir :

- Demande de Notation
- Préparation d'un schéma d'analyse
- Réunion avec l'entreprise
- Comité de notation
- Publication de la note
- Suivi de la note

*Demande de Notation :

Dans la plupart des cas, le processus de notation est réalisé suite à la demande de l'émetteur qui contacte l'agence de notation en vue d'être noté sur la qualité de ces titres émis ainsi que sur sa situation globale. Cependant, les agences de notation peuvent aussi prendre l'initiative pour noter les entreprises si, éventuellement, ils ont recours aux informations nécessaires pour l'évaluer. Les trois agences ont adopté cette pratique, puisqu'elles estiment avoir le droit de noter toute émission ou tout émetteur, tant qu'elles disposent des informations publiques nécessaires.

La question que l'on peut se poser est de savoir si la qualité des ratings non sollicités est aussi pertinente que les ratings sollicités. Comme élément de réponse on peut dire que la qualité des ratings non sollicités est moins bonne. En effet on peut citer l'exemple de l'entreprise District Universitaire du comté de Jefferson (Colorado, Etats-Unis) noté par Standard and Poor's et selon cette dernière, elle aurait appartenu à la catégorie investissement, contrairement à Moody's qui lui a attribué une note de BB appartenant à la catégorie spéculative puisque elle n'a pas été sollicitée.

Lorsqu'il y a une demande de la notation, l'entreprise doit constituer un dossier qui comporte, son extrait du registre de commerce, ses statuts, ses derniers rapports annuels d'activité et ces derniers bilans et états de résultats certifiés par les commissaires aux comptes. Elle s'engage ainsi à accepter :

-Les conditions de publications et de révision éventuelle de la note.

-En cas d'incidence négative de la note sur la situation de l'entreprise, l'agence de notation n'assume aucune responsabilité.

-L'obligation d'honorer les frais de l'étude et à respecter les conditions de règlement

-L'entreprise doit accepter de divulguer toutes les informations, même dans le cas où ces derniers sont soumis au secret professionnel.

Une fois ce dossier de demande est constitué, l'agence décide de retenir ou de refuser cette demande. En cas d'acceptation, et conformément au schéma de la notation, l'étape suivante consiste à préparer le schéma d'analyse.

*Préparation d'un schéma d'analyse :

Après avoir reçu le dossier de notation, l'agence désigne un analyste qui s'occupera de prés du dossier pendant la période d'étude. La désignation de cet analyste dépendra du secteur d'activité de l'entreprise ainsi que de son emplacement géographique. Cette analyste fait parvenir par la suite les données nécessaires pour l'agence afin d'émettre son jugement.

*Réunion avec l'entreprise :

Après la réception des informations demandées par l'agence, cette dernière organise des réunions entre les dirigeants et les analystes. Ces réunions permettent de bien connaitre la situation des entreprises à évaluer en comparent des documents certifiés par les commissaires avec ceux fournis par les entreprises et en cas de fraude, elles retiennent cette fraude comme un facteur pénalisant au moment de la notation.

*Comité de notation :

Une fois que l'analyste principal a toute les informations nécessaires pour la rédaction du rapport final et interne à l'agence, il le donne au comité de notation. Ce comité revoit le dossier et décide de la note finale qui sera accordée à l'entreprise. Une fois la note finale fixée, l'agence procède à sa publication après l'accord de l'entreprise.

*Publication de la note :

Une fois la note finale est fixé, elle sera transmise, à l'entreprise en question. Ensuite soit l'entreprise donne son accord pour la note, dans ce cas l'agence procède à sa publication. Ou bien, elle ne l'accepte pas et dans ce cas deux solutions sont possibles :

-L'entreprise notée donne à l'agence d'autres informations la concernant et cette dernière va tenter d'améliorer la note, si l'entreprise n'est toujours pas satisfaite, elle renonce définitivement à la note.
-L'entreprise refuse complètement la note et l'agence ne publie aucune information la concernant.

*Suivi de la note :

Après la publication de la note, l'agence procède par la suite à son suivi, l'analyste qui suit la note doit visiter les entreprises notées chaque année afin de mettre à jour les informations disponibles. Dans ce cas toute modification d'informations susceptibles d'affecter la note doit être transmise à l'agence. Au cas où ces informations peuvent modifier l'appréciation de la qualité de crédit, les membres du comité de notation peuvent décider de mettre sous surveillance

la note. En effet, la décision de mise sous surveillance n'intervient que lorsqu'il y a un événement incertain et non anticipé.

3.1.3. *Les critères de notation.*

Trois principaux axes entrent dans l'évaluation du processus de notation d'une entreprise donnée, en l'occurence, le risque pays, le risque industriel et le risque financier. Les agences de notation évaluent l'environnement interne et externe à la firme et ils ont intégré depuis quelques années le système de gouvernement des entreprises. En effet, il s'est avéré que l'approche de risque et l'évaluation des notes sont liés à la qualité du système de gouvernance.

Dans ce cadre, nous allons présenter les critères de notation de Standard and Poor's, Moody's et Fitch.

Les critères de notation de Standard and Poor's.

Le processus de notation du risque de crédit par S&P dépend de deux éléments, à savoir, une première évaluation de l'environnement externe c'est-à-dire du risque pays et une deuxième évaluation de la situation financière de l'entreprise notée. A partir de ces deux éléments, S&P analyse les possibilités auxquelles peut s'exposer l'entreprise notée tout en utilisant les critères de notation suivant :

Les risques liés à l'activité :

_ Risques liés à l'industrie ;
_ Risques liés à la concurrence ;
_ Taille de l'entreprise ;
_ Diversification de l'activité ;
_ Qualité du management ;
_ Actionnariat.

Les risques financiers :

_ Système comptable ;
_ Profitabilité ;
_ Endettement ;
_ Liquidité ;
_ Eléments hors bilan ;
_ Flexibilité financière.

Par ailleurs, la société S&P s'est également intéressée à l'évaluation de la qualité des systèmes de gouvernement d'entreprise. En effet, ce type d'analyse permet d'exprimer l'opinion de l'agence sur les gouvernances adoptées par les entreprises. Parmi les éléments d'analyse de la gouvernance d'entreprise, on retrouve les éléments dans le tableau 1.

Notant que le système de gouvernement d'entreprise représente un produit qui peut être vendu aux entreprises et que S&P a été la première agence à

estimer un score de gouvernance d'entreprise. Ce score permet d'avoir une vision plus claire sur la solvabilité de l'entreprise en question.

TAB. 1. Les familles de critères de Standard and Poor's

Thèmes	Critères
La structure de la propriété	La transparence de la structure de propriété, la concentration et l'influence de la structure de la propriété.
Les relations et les droits des parties prenantes de l'entreprise	Les procédures de votes en assemblée générale ; Les droits de propriété et financiers (les dividendes, la capacité d'exercice des droits, la cessibilité des actions) ; La défense contre l'OPA.
la transparence financière et la divulgation de l'information	La qualité et le contenu de l'information publique divulguée ; Le temps et l'accès à la divulgation de l'information ; l'indépendance et l'intégrité du processus d'audit.
Les procédures et la stucture du conseil d'administration	La structure du conseil d'administration et sa composition ; le rôle et l'éfficacité du conseil d'administration ; Le rôle et l'indépendance des administrateurs ; Les politiques de rémunération, d'évaluation et d'évolution des dirigeants et des administrateurs

Source : "Corporate Ratings Criteria" Standard and Poor's 2002

Les critères de notation de Moody's.

Parmi les critères utilisés par les analystes de Moody's, on trouve généralement, les risques liés au pays, la position concurrentielle et activité de l'entreprise, la part de marché de l'entreprise, les risques liés à l'industrie sur laquelle opère l'entreprise, la qualité du management de l'entreprise, sa position et sa flexibilité financière. Moody's s'est également intéressé aux systèmes de gouvernance des entrepirses (voir tableau 2). En effet, elle a déclaré en 2002 son intention d'approfondir ses analyses de procesus de notation en incluant les pratiques de gouvernement d'entreprises.

TAB. 2. Les familles de critères de Moody's

Thèmes	Critères
Composition et fonctionnement du conseil d'administration	Taille du conseil ; Fonctionnement et composition du conseil ; Les activités du conseil ;
Processus d'audit .	Comité d'audit.
Les conflits d'intéret .	Les conflits entre les actionnaires et les directeurs ;
La politique de rémunération	La rémunération des cadres et des administrateurs ;
Les droits des actionnaires	Traitement équitables des actionnaires ; Droits de votes ;
Stucture du capital	Strucutre du capital ; Les détentions de capital des différentes parties ;
Information sur le gouvernement d'entreprise	Les informations sur les pratiques de gouvernement appliquées par l'entreprise ;

Source : "La notation Moody's : mode d'emploi" Moody's 2003

Les critères de notation de Fitch Ratings.

Le processus de notation des entreprises de Fitch se fait en deux étapes, la première consiste en une analyse de l'environnement externe à l'entreprise et de son environnement interne et une seconde étape, consiste à évaluer son rapport risque rendement à partir des données communiquées par l'entreprise. Afin d'assurer une meilleure évaluation de la qualité de crédit de l'entreprise notée, Fitch s'est également intéressé à l'évaluation de la qualité de son système de gouvernement.

L'examen conjoint des trois tableaux ainsi que les critères de notation de S&P, Moody's et Fitch révèlent que l'élément le plus déterminant en terme d'évaluation de la qualité du gouvernement de l'entreprise n'est autre que la stucture de la propriété et du capital ainsi que la transparence financière. En effet, Cette transparence va permettre aux agences de notation de mieux cerner la situation réelle de l'entreprise.

TAB. 3. Les familles de critères de Fitch

Thèmes	Critères
Efficacité et indépendance du conseil	La taille du conseil ; Le fonctionnement et la composition du conseil ; Le processus de nomination ;. Les procédures concernant l'ordre du jour ;
Les transactions entre les différentes parties .	La présence des mécanismes ou des politiques qui assurent les transactions ; Le but et les motivations fondamentaux derrière la transaction ; Le rôle du conseil dans les transactions ;
Le processus d'audit .	L'indépendance des membres de comité d'audit les procédures et le procédé du comité concernant les aspects principaux de comptabilité ; Les risques potentiels d'audit, et la qualité des contrôles internes ;
La rémunération	La rémunération des cadres et des administrateurs ; La politque de rémunération de la compagnie par rapport à ses concurrents ;
Stucture du capital	La structure du capital ; Le détail de chaque détention de capital ;

Source : "Evaluating Corporate Governance" Fitch Ratings 2004

3.2. Présentation des agences de notation.

Pour le besoin de son développement et de sa croissance et surtout pour le financement de ses activités par le crédit, les entreprises ont de plus en plus recours à la notation auprès des agences de notation . Nous présentons d'une manière succincte les trois principales agences de notation, Standard & Poor's, Moody's Investors et Fitch Ratings ainis que leurs échelles de notations.

L'une des composantes les plus importantes de la notation financière est constituée par les échelles de notation. Elles servent à attribuer des notes aux entités, entreprise, banque, collectivité ou pays en fonction des divers critères établis. Les agences de Ratings distinguent deux types d'échelles, une échelle pour les notations à long terme et une échelle de notation à court terme dont les échéances sont respectivement supérieures et inférieures à une année.

Nous présentons les différentes échelles de notations des trois principales agences leaders notamment Standard and Poor's, Moody's et Fitch Ratings.L'utilité

de cette description réside dans la compréhension des différentes notes attribuées par les agences de notation.

3.2.1. *Echelle de notation de Standard and Poor's.*

L'agence de notation Standard and Poor's utilise deux types de catégories d'échelles, les échelles de notation à long terme et les échelles de notation à court terme.[1]

Echelle de notation à long terme.

Cette agence distingue deux types de catégories des échelles de notation, une catégorie d'investissement et une catégorie de spéculation.La catégorie d'investissement dont les notes varient de AAA à BBB est la moins risquée en termes des perspectives futures par rapport à la catégorie de spéculation (voir la page suivante). Cette dernière dont les notes varient de BB à D regroupe des émissions dont le remboursement du capital et d'intérêt est plus aléatoire puisqu'il dépende des conditions externes à l'entité notée.

Les échelles de notation de S&P dénotent d'un caractère plus risqué des émissions de la catégorie de spéculation par rapport à la catégorie d'investissement. Ce surplus qui en résulte traduit le surplus de rémunération par rapport à la catégorie d'investissement.

TAB. 4. Catégorie d'investissement pour Standard and Poor's

Note	Définition
AAA	Cette note traduit la capacité extrêmement forte de remboursement du capital et des intérêts,c'est la meilleure note attribuée par l'agence S&P.
AA	Elle représente une capacité très forte de faire face aux engagements de paiement des intérêts et du principal ; Cette classe est très proche de la classe précédente ;
A	Possède une forte capacité de paiement des intérêts et du principal entachée d'une certaine sensibilité aux effets défavorables les conditions économiques.
BBB	Possède une capacité suffisante pour faire face aux engagements en matière de principal et d'intérêts entachés de conditions économiques défavorables et d'une sensibilité accrue de l'aptitude à faire à ces conditions.

[1]Source Standard and Poor's

TAB. 5. Catégorie de spéculation pour Standard and Poor's

Note	Définition
BB	Les paiements des intérêts et du principal présentent une incertitude du fait de la vulnérabilitéde l'émetteur face aux conditions défavorables sur les plans économique et financier.
B	Le paiement des intérêts est incertain du fait de la vulnérable aux conditions défavorables sur les plans économique et financier. Il peut néanmoins faire face à ses engagements.
CCC/C	Le paiement à l'échéance présente des doutes et dépend de l'occurrence des conditions sur les plans économique et financier favorables .
D/SD	L'émetteur est déjà en défaut sur les paiements des intérêts et du principal sinon un délai de grâce est prévu dans ces conditions. La note D traduit la portée générale ou partielle et l'attribution de la note SD indique que le défaut constaté ne remet en cause pas les autres engagements au service de la dette.

Il est important de rappeler que :

- Les notes « AA » à « CCC » sont assorties des signes plus (+) ou moins (-) afin de préciser la position relative dans l'échelle des notes.
- Chaque note publiée est accompagnée d'une indication de perspective « stable », « positive » ou « négative ». Cette indication de perspective indique l'évolution potentielle des notes dans un horizon défini par les agences de notation et représente une anticipation et non une certitude du fait que l'occurrence des événements non anticipés peut apporter une modification de la note ou des perspectives d'évolution accompagnant cette note.

Echelle de notation à court terme.

Au même titre que l'échelle de notation de long terme, on distingue deux catégories au sein de l'échelle de notation à court terme, en l'occurrence, la catégorie d'investissement et la catégorie spéculative.

La mise sous surveillance d'une note est indiquée par les indices de la note. Ces indices sont attribués lors de la manifestation d'un événement particulier susceptible d'apporter des modifications de la note dans un horizon donné. Notons que la surveillance peut avoir une implicative positive, négative ou indéterminée selon que la nature de l'événement survenue le permette.

TAB. 6. Catégorie d'investissement à court terme pour Standard and Poor's

Note	Définition
A-1+	Très forte aptitude à assurer un service normal de la dette.
A-1	Forte aptitude à assurer un service normal des dettes.
A-2	Aptitude satisfaisante à assurer un service normal des dettes.
A-3	La capacité de paiement à l'échéance est acceptable ; Il existe cependant une plus grande sensibilité aux changements défavorables de circonstances économiques et financières par rapport aux autres émetteurs ;

TAB. 7. Catégorie spéculative court terme pour Standard and Poor's (suite)

Note	Définition
B	Cette classe présente un certain caractère d'incertitude mineure quand au paiementà l'échéance.
C	Le paiement à l'échéance présente quelques doutes
D	Défaut de paiement constaté.
NR	Le rating 'No Rating' stipule que l'entreprise ne demande plus à être notée, ou bien qu'elle n'excite plus sur le marché.

3.2.2. *Echelle de notation de Moody's.*

L'échelle de notation de Moody's ne présente pas des différences fondamentales par rapport à celle de S&P sauf au niveau des codes attribués à chaque classe de notation. A l'instar de S&P, Moody's dispose de deux échelles de notation, à savoir, l'échelle des émissions long terme et l'échelle des émissions de court terme et de deux catégories au sein de chaque échelle, à savoir, une catégorie d'investissement et une catégorie spéculative.[2]

Echelle de notation à long terme. Moody's peut attribuer des indices numériques (1,2 et 3) à ses notes de Aa à Caa. L'indice 1 indique que l'obligation est située dans le premier cran de la note principale, chose qui stipule la meilleure qualité de crédit au sein de cette classe. L'indice 2 indique que l'obligation est située dans le second cran de sa note principale, chose qui stipule une qualité de crédit moyenne au sein de cette classe. L'indice 3 indique que l'obligation est située dans le troisième cran de sa note principale, chose qui stipule une qualité de crédit réduite au sein de cette classe.

[2]Source Moody's

TAB. 8. Catégorie d'investissement pour Moody's

Note	Définition
Aaa	Les obligations notées Aaa présentent une qualité exceptionnelle avec un risque de crédit négligeable
Aa	Les obligations notées Aa présentent une qualité élevée et un risque de crédit assez réduit. .
A	Les obligations notées A sont considérées comme étant de qualité moyenne "supérieure " et sont dotées d'un risque de crédit réduit
Baa	Les obligations Baa présentent un risque modéré, elles sont considérées comme étant de qualité moyenne et sont dotées de quelques caractéristiques spéculatives

TAB. 9. Catégorie de spéculation pour Moody's

Note	Définition
Ba	Les obligations Ba sont dotées de quelques éléments spéculatifs et sont soumis à un risque de crédit éventuel
B	Les obligations B sont considérées comme des obligations spéculatives et sont soumise à un risque de crédit élevé
Caa	Les obligations Caa sont considérées comme étant de qualité réduite et sont soumise à un risque de crédit très élevé.
Ca	Les obligations notées Ca sont des obligations purement spéculatives et semblent avoir tendance à faire défaut dans un avenir très proche avec quelques possibilités de . recouvrement du principal ou des intérêts .
C	Les obligations C sont déjà en défaut de paiement avec une probabilité minime de recouvrement du principal ou des intérêts

Echelle de notation à court terme.

Les notes de court terme sont des opinions sur la capacité de l'émetteur d'honorer ses engagements financiers de court terme. Les ratings sont accordés soit pour les émetteurs, soit pour les instruments d'émissions de dettes de court terme. L'échéance de ces dettes ne peut être supérieure à 12 mois. Contrairement à S&P, Moody's ne fait pas de distinction entre les catégories d'investissement et de spéculation pour les émissions de court terme.

TAB. 10. Catégorie d'investissement à court terme pour Moody's

Note	Définition
P-1	Le rating Prime-1 implique une capacité extraordinaire de l'émetteur pour honorer ses engagements à court terme. Cette capacité est souvent liée à des facteurs très favorables, tel qu'une position de marché dominante,un rendement sur investissement important, des marges confortables, etc.
P-2	Le rating Prime-2 stipule une forte capacité de l'émetteur pour servir ses dettes de court terme. Ce rating est généralement expliqué par les mêmes conditions favorables que pour le rating «Prime-1 » sauf que dans ce cas, le niveau de ces caractéristiques est moins prononcé.
P-3	Le rating Prime-3 montre que l'émetteur dispose d'une capacité acceptable d'honorerses engagements de court terme.
NP	Le rating 'Not Prime' stipule que l'émetteur ne correspond à aucune des trois catégories précédentes. Cette catégorie peut être considérée comme une catégorie spéculative de court terme.

3.2.3. *Echelle de notation de Fitch Ratings.*

L'échelle de notation de Fitch ne diffère pas de celle de S&P sauf pour l'échelle de notation de court terme. A l'instar de S&P et de Moody's, Fitch distingue entre deux catégories pour les ratings à long terme, à savoir, une catégorie d'investissement et une catégorie spéculatives, mais cette distinction n'est pas reproduite pour les notations de court terme, à l'instar de Moody's.[3]

[3]Source Fitch Ratings

Echelle de notation à long terme.

TAB. 11. Catégorie d'investissement pour Fitch Ratings

Note	Définition
AAA	Les Entités pour lesquelles Fitch attribue la note la plus élevée ;. L'aptitude de paiement en temps et en heure du principal et des intérêts est la plus forte, comparativement aux autres entités émettrices de dettes dans un pays ;
AA+ AA AA-	Entités pour lesquelles l'aptitude de paiement en temps et en heure du principal et des intérêts est très forte, comparativement aux autres entités émettricesde dettes dans le pays ; Le risque de défaut lié à ces créances ne présente pas de différences significatives avec celui des créances notées AAA et les signes '+' et '-'marquent des nuances de qualité ;
A+ A A-	Entités pour lesquelles l'aptitude de paiement en temps et en heure du principal et des intérêts est forte, comparativement aux autres entités émettrices de dettes dans le pays ;. Cependant une évolution défavorable des conditions économiques pourrait affecter cette aptitude dans une plus large mesure que pour les créances des catégories supérieures ;
BBB+ BBB BBB-	Entités pour lesquelles l'aptitude de paiement en temps et en heure du principal et des intérêts est adéquate, comparativement aux autres entités émettrices de dettes dans le pays ; Cependant une évolution défavorable des facteurs d'exploitation ou des conditions économiques et financières pourrait affecter cette aptitude dans une plus large mesure que pour les créances des catégories supérieures.

TAB. 12. Catégorie de spéculation pour Fitch Ratings

Note	Définition
BB+ BB BB-	Entités pour lesquelles il existe une incertitude quant à l'aptitude de paiement en temps et en heure du principal et des intérêts comparativement aux autres entités émettrices de dettes dans le pays ; L'aptitude au paiement en temps et en heure du principal et des intérêts reste sensible à l'évolution défavorable des facteurs d'exploitation ou des conditions économiques et financières ;
B+ B B-	Entités pour lesquelles il existe une forte incertitude quant à l'aptitude de paiement en temps et en heure du principal et des intérêts comparativement aux autres entités émettrices de dettes dans le pays ; Le principal et les intérêts sont pour le moment payés en temps et en heure, mais la marge de sécurité est faible et dépend d'une persistance de conditions économiques et financières favorables.
CCC+ CCC CCC-	Entités pour lesquelles la possibilité d'un défaut de paiement est perceptible, comparativement aux autres entités émettrices de dettes dans le pays ; Le paiement en temps et en heure du principal et des intérêts repose exclusivement sur la persistance de conditions économiques et financières favorables.
DDD DD D	Entités dont le défaut de paiement est constaté ; Les entitésnotées DDD ont le potentiel de recouvrement le plus élevé de 100% à 90% du montant du principal et des intérêts ; Les entités notées DD ont un potentiel de recouvrement de l'ordre de 50% à 90% ; Tandis que les entités notées D présentent un potentiel de recouvrement de 50% ou moins.

Echelle de notation à court terme.

L'échelle de notation de court terme de Fitch ne fait pas de distinction entre la catégorie spéculative et la catégorie d'investissement, à l'instar de celle de Moody's et contrairement à celle de S&P.

TAB. 13. Catégorie d'investissement à court terme pour Fitch Ratings

Note	Définition
F1+ F1	Créances pour lesquelles l'aptitude de paiement en temps et en heure du principal et des intérêts est la plus forte, comparativement aux autres entités émettrices de dettes à court terme dans le pays. Dans ce cas, les émetteurs présentent une solvabilité particulièrement forte, un signe '+' peut compléter la note de F1.
F2	Créances pour lesquelles l'aptitude de paiement en temps et en heure du principal et des intérêts est satisfaisante, comparativement aux autres entités émettrices de dettes à court terme dans le pays. Cependant, la marge de sécurité est moins importante que pour les créances notées F1.
F3	Créances pour lesquelles l'aptitude de paiement en temps et en heure du principal et des intérêts est adéquate, comparativement aux autres entités émettrices de dettes à court terme dans le pays. Toutefois, cette aptitude de paiement est plus sensible aux évolutions défavorables des conditions économiques et financières que pour les créances notées dans les catégories supérieures
B	Créances pour lesquelles il existe une incertitude quant à l'aptitude de paiement en temps et en heure du principal et des intérêts, comparativement aux autres entités émettrices de dettes à court terme dans le pays et ce du fait que cette aptitude est très sensible aux évolutions défavorables des conditions économiques et financières
C	Créances pour lesquelles il existe une forte incertitude quant à l'aptitude de paiement en temps et en heure du principal et des intérêts, comparativement aux autres entités émettrices de dettes à court terme dans le pays. En effet, cette aptitude repose exclusivement sur la persistance de conditions économiques et financières favorables.
D	Créances dont le défaut de paiement est constaté ou est imminent

3.3. Champs d'application de la notation.

Les champs d'application de la notation permettent de comprendre l'étendue des activités de notation des agences ainsi que les différences des notes attribuées. Ils servent aussi à formuler des informations destinées aux investisseurs. La notation d'émetteurs et la notation d'émission sont les deux principaux champs d'application de la notation.

- La notation de référence, appelée également la notation des émetteurs, nous informe sur la capacité d'une entreprise, collectivité locale ou même une entité souveraine à faire face à ses engagements financiers.
- La notation d'émission s'applique à quatre catégories principales d'émission notamment la notation des émissions souveraines, la notation des émissions des collectivités locales, la notation des créances de long terme émises par les entreprises privées (émission dont la maturité est supérieure à une année, entreprises et organismes financiers) et la notation des créances à court terme émises par les entreprises privées (émission dont la maturité est inférieure ou égale à une année).

3.3.1. *Notation de référence (notation des émetteurs).*

La notation de référence renseigne sur la capacité d'une entité à honorer ses engagements financiers. Les agences de notation attribuent ce type de notation aux entités dépourvues d'émissions sur les marchés financiers. Ce type de notation examine la situation globale de l'entité à noter afin d'évaluer la situation financière quant aux différents engagements envers les tiers.

Ce type de notation couvre notamment les entités souveraines, les collectivités locales, les entreprises et les banques. Dans le cas d'une notation élevée, la notation des émetteurs permet à une entité notée d'avoir une bonne réputation pour l'accès aux financements des organismes privés avec des conditions plus avantageuses. Ainsi, la notation de référence satisfait deux types de besoin :

- Les besoins des organismes gestionnaires des risques de crédits qui cherchent à approximer la qualité globale de crédit d'une entité
- Les besoins des investisseurs souhaitant investir dans des entités dépourvues d'émissions sur le marché obligataire ou dans des entités étrangères méconnues sur le marché national. C'est le cas des entreprises européennes souhaitant profiter des opportunités d'investissement dans les pays hors l'Europe.

La notation de référence s'applique aussi bien sur le rating en monnaie locale[4] que le rating en monnaie étrangère [5].

[4]Le rating en monnaie locale évalue la capacité de l'entité à faire face à ses engagements libellés en monnaie locale.

[5]Le rating en monnaie étrangère évalue la capacité de l'entité à faire face à ses engagements libellés en monnaie étrangère.

3.3.2. *Notation des émissions.*

La notation des émissions consiste à mesurer l'habilité d'une entité émettrice d'obligations à honorer ses engagements par rapport à l'émission en question. La différence entre ce type de notation et la notation de référence réside dans le fait que la notation des émissions se limite à l'habilité d'honorer les engagements pris sur les émissions en question tandis que la notation de référence mesure l'habilité globale de l'entité à faire face à ses engagements financiers. La notation des émissions couvre généralement deux types principaux d'émission, à savoir, les émissions de long terme (souveraine, collectivité locales et entités privées confondues) et les émissions privées de court terme.

3.3.3. *Notation des émissions de long terme.*

La notation des émissions de long terme est une mesure de la probabilité relative qu'un émetteur fasse défaut sur ses engagements de long terme. Ce type de notation couvre généralement les émissions de long terme souveraines, celles des collectivités locales et celles des entités privées (organismes financiers et entreprises).

3.3.4. *Notation des émissions souveraines de long terme.*

La notation des émissions souveraine de long terme est une mesure de la probabilité relative qu'un émetteur souverain fasse défaut sur les obligations émises. L'utilisation de la probabilité relative stipule que le rating souverain donne une appréciation du risque de défaut d'un pays par rapport aux autres pays émetteurs d'obligations sur les marchés de capitaux internationaux et par rapport aux émissions considérées.

A cet effet, un émetteur souverain peut faire appel au rating pour faciliter son accès aux marchés financiers notamment en matières de conditions d'emprunts dans le cas où le rating est élevé, mais aussi en matière d'acceptation auprès des investisseurs puisqu'on remarque que les investisseurs préfèrent les obligations notées aux obligations non notées dans la mesure où les données macroéconomiques des obligations notées font l'objet d'un examen minutieux de la part des agences de rating.

La pratique de la notation souveraine a été pendant longtemps réservée uniquement aux obligations libellées en monnaie étrangères puisque ce type d'obligation était le plus susceptible d'être placé sur les marchés de capitaux internationaux. Or, face à la demande accrue de produits financiers par les investisseurs au cours des dernières années et pour les raisons de gains d'arbitrage sur le marché de change justifiés précédemment, les émissions obligataires souveraines ont enregistré une hausse spectaculaire notamment par le biais des émissions libellées en monnaies domestiques, chose qui a entraîné une extension de la notation souveraine à ce type d'émission.

Par ailleurs, il est intéressant de signaler que le fait qu'un pays soit noté par les agences de notation (notation des émissions ou notation de référence) permet de faciliter l'accès aux émetteurs, domiciliés dans ce pays et non notés par ces agences, aux marchés de capitaux internationaux dans la mesure où cette démarche permet de fournir une approximation du risque encouru sur ces émetteurs tout en sachant que les agences de notation accordent rarement une note plus élevée à un émetteur privé que celle accordée à son pays de domiciliation conformément à la règle de plafond souverain. Cette dernière peut être définie par le fait qu'une entreprise domiciliée dans un pays quelconque ne puisse avoir un rating supérieur au rating souverain du pays.

De plus, on peut aussi remarquer que le rating des émetteurs privés est étroitement lié au rating souverain. En effet, dès lors que la note d'un pays est rabaissée par les agences de notation, les notes de la quasi totalité des entreprises domiciliées dans ce pays, abstraction faite de quelques cas précis, se trouvent rabaissées. Les exceptions à cette règle peuvent être expliquées par l'existence de quelques entreprises dont la situation, notamment en matière de remboursement de dettes libellées en monnaie étrangères, n'est pas affectée par les décisions du pays d'origine. Ce cas est notamment valable pour les multinationales implantées dans plusieurs pays.

Selon S&P, la notion de plafond souverain dépend de la relation entre les entreprises en questions et les autorités de régulation. En effet, une banque, qui dépend fortement des conditions réglementaires, ne peut être exonérée de cette règle, tandis qu'une entreprise industrielle qui dépend moins de la réglementation peut avoir une note supérieure à la note souveraine du pays.

Ce même avis est partagé par Fitch qui considère que la notion de plafond souverain existe effectivement mais qu'il existe aussi un nombre non négligeable de firmes qui peuvent en faire l'exception. En guise d'exemple, on peut citer le cas de l'Union Européenne (BCE notée AAA). En effet, un pays qui appartient à cette union peut avoir une note inférieure à AAA et peut abriter des émetteurs dont la qualité de crédit leur permet d'avoir des notes supérieures à ce seuil (l'Italie par exemple).

4. Conclusion

Nous avons essayé dans le cadre de ce chapitre de présenter la notion de risque de crédit et celle de la notation de crédit. Dans ce sens, notre analyse a porté dans un premier temps sur la description générale du contexte de la notation des entreprises ou des états souverains. Nous avons rappelé à ce propos les différentes classifications des notes des trois grandes agences de notation. Nous avons également précisé les conditions générales d'attribution de telle ou telle note attribuée par ces différentes agences ainsi que les conditions générales de déroulement du processus de notation.

Nous avons en particulier mis l'accent sur la relation entre l'agence de notation et l'entreprise notée afin de mieux comprendre les variation des changements de notation. Nous avons par la suite présenté les critères retenus pour l'évaluation des firmes par les agences leaders, en l'occurrence, S&P, Moody's et Fitch pour orienter les investisseurs. Ces notions servent, par la suite, à mieux comprendre le processus de notation qu'on modélise en tenant compte de la durée et du sens de variation de la note.

CHAPITRE 2

Présentation de la notion de processus ponctuels marqués et applications en risque de crédit

1. Introduction

Depuis les papiers fondateurs de Hasbrouck (1991) et de Engle et Russell (1998), la modélisation des données financières à travers l'étude même des transactions a donné lieu à une branche de la finance regroupée sous le vocable de "microstructure des marchés financiers". Elle concerne également l'étude des données "haute-fréquence". Parmi les propriétés particulières des données de transaction financières, notons qu'elles sont irrégulièrement espacées dans le temps et qu'elles présentent des discontinuités des variations de prix. Un important pan de la littérature traite de l'espacement irrégulier des données dans le temps. Prendre en compte ce dernier est indispensable si on cherche à exploiter la totalité de l'information contenue dans les données de transaction. Par exemple, la fréquence des arrivées des ordres d'achat ou de vente comportent des informations cruciales sur l'état du marché financier et joue un rôle important dans l'analyse de la microstructure de ces marchés (à titre d'exemple : la modélisation de la volatilité intraday, la mesure et la prévision de la liquidité, des coûts de transaction et des risques d'illiquidité implicite).

Identifier la nature des données de transaction (irrégulières ou non) exige que nous modélisions la série sous la forme d'un processus ponctuel marqué. Un point très important est d'estimer au mieux les durées d'attente selon les événements d'intérêt. Celles-ci mesurent le temps écoulé entre deux réalisations consécutives d'un évènement de type donné (achat, vente, etc...). Les "durées de prix" correspondent par exemple aux périodes correspondant à des variations absolues des prix dépassant un niveau fixé. Elles peuvent être utilisées comme mesure de volatilité. De même, une "durée de volume" est liée au temps nécessaire à ce qu'un certain seuil de volume d'ordres ou de quantités échangées cumulées soit franchi. Cela donne une idée de la liquidité du marché, dimension très importante en termes de microstructure [1].

Une propriété importante des données de transaction est qu'elles correspondent à des événements regroupés au cours du temps, ce qui implique que les durées entre événements financiers consécutifs suivent des processus positivement auto-corrélés avec une forte persistance. En effet, les propriétés dynamiques de ces durées sont assez semblables à celles des volatilités (quotidiennes). Ces caractéristiques peuvent être capturées en utilisant des voies

[1] Pour plus de détails et d'illustrations, voir Bauwens et Giot, 2001, Hautsch, 2004

alternatives à travers différentes dynamiques basées sur la durée, l'intensité ou le comptage, permettant de représenter au mieux ces phénomènes grâce à un processus ponctuel. La structure des ensembles de données sur les actions est sensiblement différent de celle de l'ensembles des données utilisés pour le risque de crédit. Alors que de nombreuses données de fréquence sont disponibles mais pour un nombre limité d'actions, les données concernant les entreprises sont nombreuses quant à la diversité des compagnies mais nous disposons de très peu de données pour chacune d'entre elles, notamment pour évaluer leurs risques de crédit. Cela nécessite la mise en commun de données sur différentes firmes dans l'échantillon.

Ce chapitre examine en particulier des modèles basés sur la notion d'intensité d'un processus ponctuel, permettant de calibrer la loi des durées. Les modèles de processus ponctuels marqués ont été appliqués à des problèmes d'extraction d'objets en télédétection, mais encore, en démographie, lorsqu'on veut déterminer la répartition de la population humaine sur le globe. L' avantage de ce modèle est la simplicité d'usage de ces estimateurs.

On peut noter que la manière la plus intuitive pour caractériser un processus ponctuel a été suggérée en temps discret par Engle et Russell (1998). Cette approche a inspiré par la suite une littérature assez riche sur ce domaine. Néanmoins, Russell (1999) en raisonnant en temps continu a défini la notion d'intensité, ce qui constitue un cadre souple et particulièrement efficace pour la modélisation des processus multivariés. La première étape serait alors d'envisager une généralisation multivariée de Russell (2001). Cependant, ce n'est pas si simple. Russell (2001) a développé son analyse dans le contexte de données de haute fréquence et en particulier pour modéliser les transactions sur actions.

Tout d'abord, nous relâchons la contrainte stricte d'un intervalle de temps fixe entre deux variations de prix successives. Les intervalles entre deux temps d'arrivée sont appelés des durées et sont pris au hasard. Leurs espérances conditionnelles dépendent de la durée passée dans un processus autorégressif. Ces modèles pour les données de transaction de haute fréquence ont été proposés par Engle et Russell (1997,1998) et ont déjà passé avec succès l'examen empirique de prédiction de la théorie de la microstructure. Deuxièmement, notre modèle permet d'avoir une dépendance entre les probabilités d'abaissement ou d'augmentation . Nous suivons principalement le cadre de Cox (1970, 1981) et son extension récente par Engle et Russell (1998). Il consiste en une version en termes de série pure du type de spécification adoptée par Hausman, Lo et MacKinlay (1992) pour l'analyse des actions de transaction. Cette modélisation dynamique est caractérisée par la probabilité jointe des transitions des prix et les temps d'arrivée des transactions. Elle est riche et suffisamment flexible pour capturer le comportement historique des données de changement de prix.

Les modèles à intensité qui varie dans le temps ont reçu beaucoup d'attention dans la litérature micro-économétrique (les principaux domaines d'application en économie comprennent le commerce "intraday") ainsi qu'en gestion des risques, notamment en risque de crédit (les valeurs par défaut des entreprises et la probabilité de transition de la note de crédit). Récemment, un certain nombre de modèles d'intensités ont été proposés par Bauwens et Hautsch (2006), Koopman et Coll. (2008), Horel, Duffie, Eckner et Jacqueline Simoneau (2006), Koopman, Lucas et Schwaab (2008). Le traitement économétrique de ces paramètres par les modèles est complexe, tandis que l'estimation des paramètres exige des calculs complexes. En particulier, l'évaluation de la probabilité adéquate pour ces modèles nécessite des calculs de grande dimensions à l'aide de techniques d'échantillonnage ou d'algorithme de Monte-Carlo. Toutefois, l'utilisation de telles techniques basées sur la simulation peut faire obstacle au développement de l'application de ces modèles dans la pratique.

Dans la section 2, nous introduisons les concepts fondamentaux de la théorie des processus ponctuels marqués et nous en présentons les principales propriétés mathématiques. Dans la section 3, nous passons en revue différentes classes de modèles dynamiques de durée. Différents types d'application de modèles dynamiques d'intensité en risque de crédit sont présentés dans la Section 4.

2. La notion de processus ponctuel marqué

Dans cette section, nous rappelons les principales définitions et propriétés des processus ponctuels.[2]

2.1. Processus ponctuels marqués.

Un processus ponctuel marqué est caractérisé par deux suites : La suite $(T_n)_n$ correspond à la suite des instants (ici, ceux des changements de note) ; la suite X_n correspond à la valeur à l'instant T_n (ici, la valeur de la note). La suite $(T_n, X_n)_n$ constitue un processus ponctuel marqué.

Rappelons la notion de processus d'intensité.[3] On considère la filtration $\mathcal{F}$ générée par le processus ponctuel marqué. On désigne par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu des boréliens.

Introduisons les processus N_t et Z_t qui définissent respectivement le nombre de sauts et la valeur cumulée du processus ponctuel marqué sur la période de

[2]Voir également l'ouvrage de Last et Brandt (1995).

[3]En ce qui concerne les définitions élémentaires et les propriétés de base des processus ponctuels marqués, voir par exemple Bremaud (1981), Last et Brandt (1995) pour les processus ponctuels marqués à valeurs réelles, et Jacod (1975) pour des processus ponctuels marqués multivariés.

temps $[0,t]$. Ils sont donc définis par :

$$N_t = \sum_{T_n \leq t} 1, \tag{1}$$

$$Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k. \tag{2}$$

DÉFINITION 1. *Définissons $\mu = \mu(\omega; ds; dx)$ la mesure des sauts de Z. La mesure μ est donnée par :*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mu(\omega; (0,t] \times A) = \sum_{T_n \leq t} \mathbb{I}_{X_n \in A3}.$$

2.2. Processus d'intensité.

A partir de la théorie générale des mesures aléatoires, nous savons qu'il existe une mesure $\nu = \nu(\omega; ds; dx)$ appelée le compensateur de μ qui est une mesure prévisible de telle sorte que $(\mu - \nu)$ est une mesure martingale locale. (en particulier, pour chaque $A \in \mathcal{B}(\mathcal{R} - \{0\})$, le processus $(\mu(\omega; (0,t] \times A) - \nu(\omega; (0,t] \times A)_t$ est une martingale) (voir par exemple Jacod et Shiryaev (2003) pour les définitions et les propriétés basiques).

PROPOSITION 1. *Supposons que $G_n(dt, dx)$ soit une version régulière de la loi conditionnelle (T_{n+1}, X_{n+1}) par rapport à $\mathcal{F}_{T_n}$. Selon Jacod (1975), nous avons :*

$$\nu(dt, dx) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{I}\{T_n < t \leq T_{n+1}\} \frac{G_n(dt, dx)}{G_n([t, \infty[\times \mathbb{R})}. \tag{3}$$

Notons F_n une version régulière de la loi conditionnelle de T_{n+1} par rapport à $\mathcal{F}_{T_n}$:

$$F_n(dt) = G_n(dt \times \mathbb{R}).$$

Enfin, introduisons le noyau K de telle sorte que $K(T_{n+1}, dx)$ soit la loi conditionnelle de X_{n+1} par rapport à $\mathcal{F}_{T_n}$ et T_{n+1}.

2.3. Intégrales par rapport aux mesures de sauts.

LEMME 1. *La filtration $\mathcal{F}$ étant générée par le processus ponctuel marqué (T_n, X_n), tout processus H prévisible peut être décomposé comme suit :*

$$H(\omega, t, x) = \sum_{T_n \leq t} 1_{]]T_n, T_{n+1}]]} h_n(x) \text{ avec } h_n(x) = h(n; (T_1, X_1); ...; (T_n, X_n))(x). \tag{4}$$

L'intégrale du processus H par rapport à la variable aléatoire v est donc donnée par :

$$H * \nu_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t H(\omega, t, x) \nu(ds, dx) = \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k\geq 0}^{n-1}\int_{T_k}^{T_{k+1}} h(n;(T_1,X_1);...;(T_k,X_k))(x)\frac{G_k(ds,dx)}{G_k([s,\infty[\times\mathbb{R})}$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{T_n}^{t} h(n;(T_1,X_1);...;(T_n,X_n))(x)\frac{G_n(ds,dx)}{G_n([s,\infty[\times\mathbb{R})}\mathbb{I}_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}}.$$

Dans ce qui suit, nous rappelons les propriétés de base des processus des points marqués, en particulier la détermination du compensateur prévisible. Nous détaillons quelques cas particuliers.

3. Exemples fondamentaux

EXEMPLE 1. ***(Temps de transaction déterministes)***

C'est le cadre habituel des modèles discrets : les temps de variations des processus sont fixes. Dorénavant les sauts du temps satisferont $T_n = t_n$ (ils sont déterministes). Nous déduisons que $\mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_n$ où $\mathcal{F}_n$ est l'information disponible au temps t_n. Notons que dans ce cas, nous avons :

$$\int \phi(x)\nu(t_n,dx) = \mathbb{E}[\phi(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}].$$

EXEMPLE 2. ***(Marques indépendantes)***

Ce type de modèle introduit des distributions des temps d'arrivée plus générales par exemple que celles liées aux processus de Lévy. Néanmoins, les amplitudes des variations ne dépendent pas des instants de variations.

Soit $\bar{\Phi} = (T_n)_n$ un processus ponctuel arbitraire où $\bar{\Lambda}$ désigne la mesure de l'intensité et $(X_n)_n$ est une suite i.i.d.de $\mathcal{X}-$valeurs des éléments aléatoires avec une distribution G indépendante de $\bar{\Phi}$. Le processus des points marqués $\Phi = ((T_n,X_n))_n$ est appelé un G-marquage indépendant de $\bar{\Phi}$. Il est relativement facile de vérifier que Φ a une mesure d'intensité $\bar{\Lambda}\otimes G$. Ainsi, nous obtenons :

$$\nu(dt,dx) = \sum_{n\geq 0} 1_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}}\frac{F_n(dt)}{F_n([t,\infty[)}G(dx).$$

Le cas des processus ponctuels marqués indépendants. Rappelons en particulier la définition d'un processus homogène de Poisson.

Soit $\bar{\Phi} = (T_n)_n$ le processus homogène de Poisson. Nous avons :

-i) Les nombres aléatoires $\mathcal{N}(A_1),...,\mathcal{N}(A_n)$ sont indépendants pour l'ensemble des mesures disjointes deux à deux $A_1,...,A_n$ (propriété des accroissements indépendants).

-ii) Soit $A\in\mathcal{B}^+$. Alors, nous obtenons :

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}(A)=k] = \frac{\bar{\Lambda}(A)^k}{k!}e^{-\bar{\Lambda}(A)},$$

où

$$\bar{\Lambda}(A) = \lambda|A|,$$

et $|A|$ est la mesure de Lebesgue de A.

Le processus marqué indépendant de Poisson est un processus marqué indépendant défini de telle sorte que la composante de temps est un processus de Poisson homogène. Le processus de taux de rendement est alors un processus de Lévy.

Considérons maintenant des modèles qui permettent de tenir compte des distributions plus générales des durées entre instants d'arrivée consécutifs : ils n'ont plus besoin d'être déterministes ou de suivre des lois exponentielles avec un paramètre constant. En outre, il est possible de corréler les variations des cours des actions avec les temps de transactions. Les distributions des durées entre instants d'arrivée consécutifs peuvent aussi être dirigées par un processus donné Y.

EXEMPLE 3. ***(Marquage dépendant)***

Un processus ponctuel marqué $\Phi = ((T_n, X_n))_n$ est appelé une position de marquage dépendante de $\bar{\Phi} = (T_n)_n$ si $X_1, ..., X_n...$ sont conditionnellement indépendants sachant que $\bar{\Phi}$ et $\mathbb{P}[X_n|\bar{\Phi}] = G(T_n, dx)$. Dans ce cas le compensateur Φ est donné par :

$$\nu(dt, dx) = G(t, dx)\bar{\nu}(dt).$$

Ce qui suit est un cas particulier important :

- *Processus de Poisson marqué :* $\bar{\Phi}$ est un processus de Poisson avec une mesure d'intensité continue et bornée $\bar{\Lambda}$ et $\nu(dt, dx) = G(t, dx)\bar{\Lambda}(dt)$.

Le processus $Z_t = \sum_{T_n \leq t} X_n$ est alors un processus de Poisson composé.

Considérons en particulier les processus de Poisson doublement stochastiques ou conditionnels (encore appelés les processus de Cox). Dans ce qui suit, nous considérons un processus ponctuel marqué Φ avec un espace marqué $\mathcal{X}$ adapté à une filtration $\mathcal{F}_t$ continue à droite donnée. Notons $\mathcal{N}_t(B)$ le nombre de sauts avec des amplitudes dans la partie B de $\mathcal{X}$ durant la période de temps $[0, t]$.

Φ est appelé un $\mathcal{F}_t-$ processus de Poisson marqué doublement stochastique ("Double Stochastic Poisson Process" DSPP) s'il existe une une mesure aléatoire ν dans $[0, T] \times \mathcal{X}$, $\mathcal{F}_0-$mesurable de telle sorte que :

$$\mathbb{P}[(\mathcal{N}_t - \mathcal{N}_s)(B) = k|\mathcal{F}_s] = \frac{(\nu(]s, t] \times B))^k}{k!} e^{-(\nu(]s,t]\times B))}, \ p.s.$$

REMARQUE 1. *Pour un sous-ensemble B fixé, $\mathcal{N}(. \times B)$ est un processus de Poisson doublement stochastique. Ainsi, $\mathcal{N}(. \times B)$ a des accroissements $\mathcal{F}_t$-conditionnelement indépendants . Notons que, s'il n'y a pas un temps fixe*

de discontinuité ($\nu(\{t\}) = 0$) alors ces deux propriétés sont équivalentes. La mesure aléatoire ν peut être définie également par la relation :

$$\nu(dt, dx) = \mathbb{E}[\mathcal{N}(dt, dx)|\mathcal{F}_0]$$

Le processus de Poisson marqué modulé markovien est un cas particulier de processus de Poisson marqué doublement stochastique :

L'intensité des sauts estt dirigée par un processus de Markov Y. Il est défini de la manière suivante : Il existe une chaîne de Markov $Y = (Y_t)_t$ avec un nombre fini de sauts dans des intervalles finis. Soit $\{\lambda_i :, i \in \mathcal{Y}\}$ une famille de nombres positifs. Le processus ponctuel $(T_n)_n$ est appelé un processus de Poisson modulé markovien si la distribution conditionnelle $\mathbb{P}[\mathcal{N} \in .|Y]$ est $\mathbb{P}$-presque égale à la distribution d'un processus de Poisson avec une fonction d'intensité $t \to \lambda_{Y_t}$.

Afin d'avoir un processus de Poisson marqué doublement stochastique, on doit supposer que $\mathcal{F}_0$ contient $\mathcal{F}_\infty^Y$. Nous avons alors :

$$\mathbb{P}[(\mathcal{N}_t - \mathcal{N}_s) = k|Y] = \frac{(\int_s^t \lambda_{Y_u} du)^k}{k!} e^{-\int_s^t \lambda_{Y_u} du}.$$

Ainsi, le compensateur de $\bar{\Phi}$ est donné par :

$$\bar{\nu}(dt) = \lambda_{Y_t} dt.$$

Ce processus peut être interprété comme un processus de Poisson dans un environnement aléatoire. Il est dirigé par le processus de Y.

Considérons une position dépendante d'un processus marqué avec la structure ci-dessus pour modéliser les instants de sauts. Nous avons alors :

$$\nu(dt, dx) = \lambda_{Y_t} dt G(t, dx)$$

REMARQUE 2. *Si Y n'est pas observable, $\mathcal{F}_t$ est la filtration de saut générée par le processus ponctuel marqué lui même et alors le compensateur ν est donné par :*

$$\nu(dt, dx) = \mathbb{E}[\lambda_{Y_t}|\mathcal{F}_{t-}]dtG(t, dx),$$

où $\mathbb{E}[\lambda_{Y_t}|\mathcal{F}_{t-}]$ désigne une version de la projection visible $\mathcal{F}$ de λ_Y (voir par exemple Karr, 1991, p. 302). Les probabilités neutres au risque et les prix des options sont alors déterminés par rapport à la filtration $\mathcal{F}$ et le compensateur est donné par la formule ci-dessus.

EXEMPLE 4. ***(Processus semi-markovien)***

Nous introduisons maintenant un modèle où les périodes de variation et les amplitudes de ces variations sont liées par une dépendance markovienne. Soit $((U_n, X_n))_n$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $]0, \infty] \times \mathcal{X}$ où $\mathcal{X}$ est au plus un ensemble dénombrable. Pour simplifier la notation, nous supposons dans ce qui suit que $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

Supposons que :

$$\mathbb{P}[U_0 \in dt, X_1 = j | X_0] = Q^0_{X_0 j}(dt) : \mathbb{P} - ps.$$

et

$$\mathbb{P}[U_n \in dt, X_{n+1} = i | X_0, U_0, ..., U_{n-1}, X_n] = Q_{X_n i}(dt)$$

où Q^0_{ij} et Q_{ij} sont des mesures finies dans $]0, \infty]$ pour tout $(i, j) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ de telle sorte que :

$$\sum_j Q^0_{ij}(]0, \infty[) = 1 \text{ et } \sum_j Q_{ij}(]0, \infty[) = 1.$$

De toute évidence, la distribution conditionnelle de (T_{n+1}, X_{n+1}) sous $\mathcal{F}_{T_n}$ne dépend que des valeurs de X_n.

Alors, la séquence $((T_n, X_n))_n$ avec $T_n = \sum_{i=0}^{n-1} U_i$ est appelé un processus semi-markovien *(SMP)* avec un espace d' états $\mathcal{X}$, la famille $Q^0 = \{Q^0_{ij}/(i, j) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}\}$ est appelée le retard du noyau ("kernel delay") et la famille $Q = \{Q_{ij}/(i, j) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}\}$ est appelé noyau semi-markovien (SMP).

Rappelons que si $\sum_{j \in \mathcal{X}} Q^0_{ij} = F^0$ et $\sum_{j \in \mathcal{X}} Q_{ij} = F$ sont indépendents de i alors le processus semi-markovien est un processus de renouvellement (les files d'attente U_i sont iid avec une distribution de file d'attente F et une distribution de délai F^0).

Parfois, $Q^0_{ij}(dt)$ et $Q_{ij}(dt)$ sont absolument continues par rapport à une mesure finie $\sigma-$de γ dans $\mathbb{R}^+$. C'est à dire que nous avons :

$$Q^0_{ij}(dt) = q^0_{ij}(t)\gamma(dt) \text{ et } Q_{ij}(dt) = q_{ij}(t)\gamma(dt)$$

Notons $Q^0_j = \sum_j Q^0_{ij}$ et $Q_j = \sum_j Q_{ij}$. Définissons $r^0_{ij}(t)$ et $r_{ij}(t)$ les quantités $\frac{q^0_{ij}(t)}{Q^0_i[t,\infty[}$ et $\frac{q_{ij}(t)}{Q_i[t,\infty[}$.

Par exemple, si pour certains nombres non négatifs $r(i, j)$ avec $r(i) = \sum_j r(i, j)$, nous avons :

$$Q_{ij}(dt) = r(i, j)e^{-r(i)t}dt$$

et $Q^0 = Q$ alors le procesuss de saut X est une chaîne de Markov homogène. Dans ce cas, les coefficients $r(i, j)$ sont appelés des taux de transition et $p(i, j) = \frac{r(i,j)}{r(i)}$ désigne la fonction de transition.

De la relation générale qui donne le compensateur ν :

$$\nu(dt, dx) = \sum_{n\geq 0} 1_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}} \frac{G_n(dt, dx)}{G_n([t, \infty[\times\mathcal{X})}$$

Il peut être directement déduit. Le compensateur ν est déterminé par :

$$\nu(dt, \{j\}) = 1_{t\leq T_1} \frac{Q^0_{X_0 i}(dt)}{Q^0_{X_0}([t, \infty[)} + \sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}} \frac{Q_{X_n j}(dt - T_n)}{\sum_j Q_{X_n j}([t - T_n, \infty[)}$$

En particulier si

$$Q^0_{ij}(dt) = q^0_{ij}\gamma(dt) \text{ et } Q_{ij}(dt) = q_{ij}\gamma(dt)$$

alors

$$\nu(dt, \{j\}) = 1_{t\leq T_1} r^0_{X_0 j}(t)\gamma(dt) + \sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}} r(X_n, j)(t - T_n)\gamma(dt - T_n)$$

et pour le cas plus particulier

$$Q^0_{ij}(dt) = Q_{ij}(dt) = r(i, j)e^{-r(i)t}dt,$$

nous avons :

$$\nu(dt, \{j\}) = 1_{t\leq T_1} r^0_{X_0,j}(t)dt + \sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}} r(X_n, j)(dt - T_n),$$

Le noyau de transition est alors donné par :

$$K(T_n, j) = \frac{Q_{X_n j}(dt + T_n)}{\sum_k Q_{X_n k}(dt + T_n)}.$$

Comme on peut le voir, la formule donnant l'expression quasi-explicite de la mesure du compensateur ν, est tout particulièrement importante, entre autres pour analyser statistiquement les données financières.

Heureusement, ce genre de décomposition peut être par exemple étendu à une filtration $\mathcal{F}_t$ générée par la filtration de saut et une filtration indépendante et continue (par exemple une filtration brownienne) :

Si la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ est généré par le MPP $\Phi = (T_n, X_n)_n$ et un processus indépendant $(Y_t)_t$ avec une filtration continue, alors la mesure aléatoire définie par :

$$\nu(dt, dx) = \sum_{n\geq 0} 1_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}} \frac{G_n(dt, dx)}{G_n([t, \infty[\times\mathbb{R})}$$

où $G_n(dt, dx)$ est une version ordinaire de la distribution conditionnelle de (T_{n+1}, X_{n+1}) par rapport à la filtration de saut générée par Φ, est également la mesure compensatrice des sauts sous la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$.

EXEMPLE 5. ***(Modèles ACD)***

Les modèles de durée sont utilisés dans différentes situations. Ils sont utilisés en premier lieu dans l'analyse des processus ponctuels multivariés. Ces derniers sont couramment rencontrés dans les modélisations économiques lorsque l'on observe par exemple les salaires et revenus de plusieurs individus...C'est également le cas lorsque, pour un individu donné, le processus ponctuel multivarié correspondant, par exemple, à son parcours sur le marché du travail. Nous pouvons également étudier des situations où le vecteur des durées est latent et certains échantillons permettent d'observer qu'une partie de ce vecteur, ce qui est le cas dans les modèles de risques concurrents.

La distribution conditionelle des files d'attente est spécifié selon un modèle ACD(m,q) proposé par Engle et Russell (1997, 1998). La classe de modèles consiste à supposer que les durées $d_{j+1} = T_{j+1} - T_j$ sont telles que :

$$d_{j+1} = \psi_{j+1}\xi_{j+1},$$

où ξ_j sont des variables i.i.d. et :

$$\psi_j = \omega + \sum_{k=0}^{m} \alpha_k d_{j-k} + \sum_{k=0}^{q} \beta_k \psi_{j-k}.$$

La fonction de hazard conditionnelle d'un modèle ACD pour $t \in]]T_j, T_{j+1}]]$ correspond à :

$$\lambda_t = \psi_{j+1}^{-1} \lambda_0 \left(\frac{t - T_j}{\psi_{j+1}} \right),$$

où λ_0 est le hasard de référence de ξ (le rapport de densité et la fonction de survie de ξ). Deux choix sont généralement adoptés pour la distribution de ξ : soit l'exponentielle ou la loi de Weibull, ce qui donne :

$$\lambda_t = \psi_{j+1}^{-1},$$

soit : $\lambda_t = \left(\Gamma(1 + 1/\gamma)\psi_{j+1}^{-1}\right)^{\gamma} (t - T_j)^{\gamma - 1} \gamma$, où Γ est la fonction gamma et γ est le paramètre de Weibull.

En ce qui concerne la distribution conditionnelle des marques, nous utilisons l'extension de l'autorégression logistique de Cox (1970,1981) donnée par Russell et Engle (1998). Nous obtenons alors la mesure compensée des sauts suivante :

$$\upsilon(dt, dx) = \lambda_t K(t, dx),$$

où pour $t \in]]T_j, Tj + 1]]$, l'intensité λ_t ainsi que le noyau de transition $K(t, dx)$ sont donnés par la fonction de hasard conditionnelle définie à partir d'un modèle ACD.

EXEMPLE 6. ***(Distributions de probabilité des durées)***

Nous indiquons ci-après des exemples fondamentaux de lois pour décrire les distributions de probabilité des durées.

TAB. 1. Exemples de distribution de durée

Distribution	Paramètres	Fonction de survie	Fonction de densité
Exponentielle	$\lambda > 0$	$exp(-\lambda t)$	$\lambda exp(-\lambda t)$
Weibull	$\alpha > 0,$ $\lambda > 0$	$exp(-\lambda t^{\alpha})$	$\alpha\lambda t^{\alpha-1} exp(-\lambda t^{\alpha})$
Gamma	$\gamma > 0,$ $\lambda > 0$	$\frac{1}{\Gamma(\gamma)}$ $\int_t^{\infty} \lambda(\lambda s)^{\gamma-1} exp(-\lambda s) ds$	$\frac{\lambda t^{\gamma-1} exp(-\lambda t)}{\Gamma(\gamma)}$
Gamma Généralisé	$\alpha > 0,$ $\lambda > 0,$ $\gamma > 0$	$\frac{1}{\Gamma(\gamma)}$ $\int_t^{\infty} \lambda\alpha(\lambda s)^{\alpha\gamma-1} exp(-(\lambda s)^{\alpha}) ds$	$\frac{\lambda\alpha\lambda t^{\alpha\gamma-1} exp(-(\lambda t)^{\alpha})}{\Gamma(\gamma)}$
Log-normal	$\sigma, \mu > 0$	$1 - \Phi\left[\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right]$	$\frac{1}{\sigma t}\varphi\left[\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right]$
Log-logistique	$\alpha > 0,$ $\lambda > 0$	$[1 + (\lambda t)^{\gamma}]^{-1}$	$(\gamma\lambda^{\gamma} t^{\gamma-1}) \times$ $[1 + (\lambda t)^{\gamma}]^{-2}$
Singh-Maddala	$\alpha > 0,$ $\lambda > 0,$ $\gamma > 0$	$[1 + (\lambda t)^{\gamma}]^{-\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{\gamma}}$	$(\gamma\alpha^{\gamma}\lambda^{\gamma} t^{\gamma-1}) \times$ $[1 + (\lambda t)^{\gamma}]^{-2}$
Burr	$\alpha > 0,$ $\lambda > 0,$ $\sigma > 0$	$\frac{1}{\sigma^2}\left[1 + \sigma^2(\lambda t)^{\gamma}\right]^{-(1/\sigma^2)}$	$(\gamma\lambda^{\gamma} t^{\gamma-1}) \times$ $[1 + \sigma^2(\lambda t)^{\gamma}]^{-(1+1/\sigma^2)}$

TAB. 2. Exemples de distribution de durée (suite)

Distribution	Fonction de hasard	Temps de variation de la fonction de hasard $dh(t)/dt$
Exponentielle	λ	constante $dh(t)/dt = 0$
Weibull	$\alpha\lambda t^{\alpha-1}$	croissante si $\alpha > 1$ décroissante si $\alpha < 1$ constante si $\alpha = 1$ $(h(t) = \lambda)$
Gamma	$\frac{\lambda(\lambda t)^{\gamma-1}exp(-\lambda t)}{\int_t^\infty \lambda(\lambda s)^{\gamma-1}exp(-\lambda s)ds}$	croissante si $\gamma > 1$ décroissante si $\gamma < 1$ constante si $\gamma = 1$ $(h(t) = \lambda)$
Gamma Généralisé	$\frac{\lambda\alpha(\lambda t)^{\alpha\gamma-1}exp(-(\lambda t)^\alpha)}{\int_t^\infty \lambda\alpha(\lambda s)^{\alpha\gamma-1}exp(-(\lambda s)^\alpha)ds}$	Distribution de Gamma avec les paramêtres $\lambda > 0$ et $\gamma > 0$ si $\alpha = 1$ Distribution exponentielle avec les paramêtres λ si $\alpha = 1$ et $\gamma = 1$
Log-normale	$\frac{\frac{1}{\sigma t}\varphi\left[\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right]}{1-\Phi\left[\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right]}$	croissante après décroissante
Log-logistique	$\gamma\lambda^\gamma t^{\gamma-1}\left[1+(\lambda t)^\gamma\right]^{-1}$	croissante après décroissante si $\gamma > 1$ décroissante si $\gamma \leq 1$
Singh-Maddala	$\gamma\alpha^\gamma t^{\gamma-1}\left[1+(\lambda t)^\gamma\right]^{-1}$	log-logistique (γ,λ) si $\lambda = \alpha$; Weibull (α^γ,γ) si $\lambda = 0$; exponentielle (α) si $\lambda = 0$ et $\gamma = 1$; croissante après décroissante si $\gamma > 1$, décroissante si $\gamma < 1$
Burr	$\frac{\left(\gamma\lambda^\gamma t^{\gamma-1}\right)}{\sigma^2} \times \left[1+\sigma^2(\lambda t)^\gamma\right]^{-1}$	log-logistique (γ,λ) si $\sigma = 1$; Weibull (α^γ,γ) si $\lambda = 0$; exponentielle (γ) si $\lambda = 1$ et $\sigma = 0$; croissante après décroissante si $\gamma > 1$ décroissante si $\gamma < 1$

4. Applications en risque de crédit

Comme rappelé dans le chapitre précédent, le domaine du risque de crédit est devenu un domaine de recherche très actif, notamment depuis le début des années 1990. Plusieurs approches ont été proposées :

- L'approche structurelle : Elle repose sur le modèle de Merton (1974). Elle stipule que le spread de crédit dépend directement de la valeur de la firme. Selon Merton, plus le ratio "dette/valeur de la firme" est faible plus la probabilité de faire défaut diminue donc le spread serait croissant. Le graphique suivant illustre les variations du spread de crédit en fonction du temps restant à maturité.

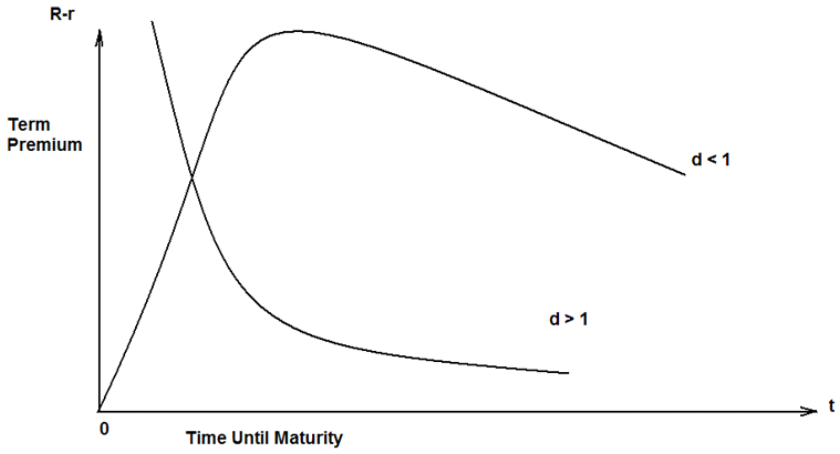


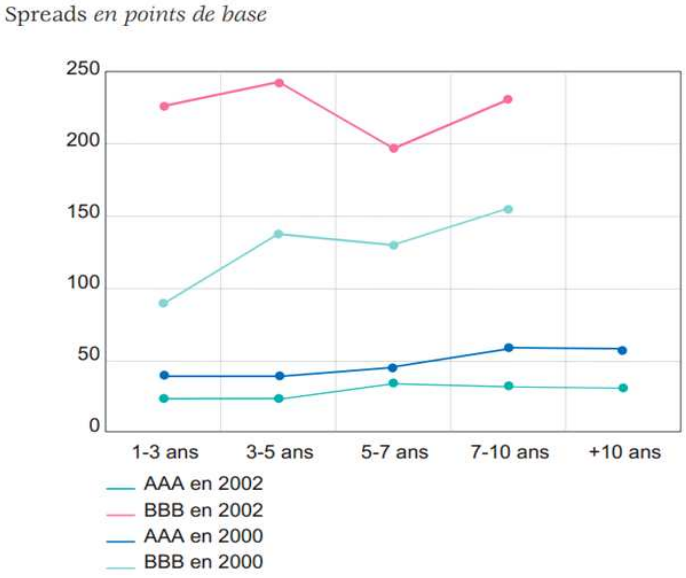
FIG. 1. Spreads de Merton en fonction de la maturité

Comme montré dans la figure (1), une obligation pour laquelle le ratio d'endettement est inférieur à 1, a un spread quasi nul pour des maturités très courtes. Ce spread passe par un maximum puis décroît. Une obligation pour laquelle le ratio d'endettement est supérieur à 1, a un spread très élevé pour des maturités très courtes mais qui décroît au fur et à mesure que le temps restant à maturité augmente.

Les firmes appartenant à la catégorie "investment grade" auraient dans ce cas une probabilité de défaut faible. Or, avec une bonne notation au début, la probabilité d'avoir une amélioration de la note au cours du temps est faible, la probabilité de défaut augmentant avec la durée.

Les graphiques suivants illustrent les problèmes de prédiction du comportement des spreads prévus par le modèle de Merton par rapport à ceux réellement observés. Nous notons en particulier que pour les triples B l'évolution prévue

par le modèle de Merton n'est pas conforme à celle observée empiriquement (voit le graphique 2).



Source : Article "Quel crédit accorder aux spreads de crédit ?"

FIG. 2. Spreads en fonction de la maturité

La limite des modèles structurels se trouve dans la qualité ou non du caractère préditif de l'instant de défaut. Plusieurs études ont été réalisées dans le but d'améliorer la modélisation et l'anticipation du risque de défaut (voir par exemple Anderson et Sundaresan (1996) ou Ericsson et Reneby (1998) où le défaut est modélisé en utilisant les modèles structurels).

- L'approche à intensité : La solution peut être alors de considérer l'évènement de défaut comme exogène. Dans ce cadre, plusieurs approches nouvelles ont été proposées, notamment en présence de taux aléatoires. Jarrow et Turnbull (1995) et Duffie et Singleton (1999) modélisent le défaut comme un évènement imprévisible ("survenant donc par surprise"), en ayant recours à des processus de saut comme ceux de Cox. Ces modèles permettent de calibrer les spreads plus facilement et sont des outils pour le "pricing" des dérivés de crédit. Ils utilisent crucialement la notion de processus ponctuels, principalement le premier instant de saut comme illustré dans ce qui suit. Anderson et Sundaresan (2000) ont expliqué les écarts des spread de crédit en utilisant le modèle de risque de crédit ("credit risk"). Ils ont trouvé que ces modèles permettent potentiellement d'expliquer les écarts de spread. Duffee (1999) a estimé un modèle d'intensité avec un seul paramètre du risque de crédit sur les obligations de sociétés américaines. L'auteur affirme avoir trouver des résultats raisonnables par rapport au rendement des obligations. Cependant, comme il

est indiqué dans Duffie et Singleton (1999), le processus retenu ne permet pas de générer la corrélation négative observée des spreads (voir Duffee, 1998) tout en maintenant le taux de hasard positif. La littérature concernant la détermination des spreads via les modèles à intensité a également pris du retard durant ces dernières années, dans la mesure où notamment les effets de contagion et les problèmes de liquidité n'avaient pas été suffisamment pris en compte.

- L'approche fondée sur la notation : Une des problématiques en risque de crédit est l'évolution des notes au cours du temps. Jarrow, Lando et Turnbull, (1997) introduisent des chaînes de Markov. Plus précisement, ils utilisent des matrices de transition, soit internes aux banques ou publiés par des agences de notation, afin de déterminer la probabilité qu'une obligation appartenant à la classe i à la date t, finisse dans la classe j à la date $t+1$. Une de ces classes représente le défaut. Il est donc possible de calculer la probabilité d'avoir défaut sur une période de temps donnée. Relativement peu de recherches empiriques ont été menées sur les liens directs entre les spreads et la notation financière. Cependant, certains articles, tel celui de Kiesel, Perraudin et Taylor (1999), ont montré que les écarts de spread changent non seulement en fonction des notes attribuées mais aussi au sein d'une même classe de risque de crédit, en particulier pour les obligations de premier ordre. Ceci nous conduit à émettre quelques doutes sur la capacité des modèles de chaînes de Markov à reproduire avec précision les prix des obligations. Notons que cette approche est traditionnellement définie en temps discret. Cependant, si on relie le changement de rating à la durée entre deux épisodes de notation, nous devons également fondamentalement utiliser la notion de processus ponctuels, comme montré dans les chapitres 3 et 4 de la thèse.

Les trois approches (structurelle, à intensité ou fondée sur la notation) sont mises en œuvre par de nombreuses banques pour la gestion du risque de défaut. Les trois principaux modèles qu'ils utilisent pour évaluer le risque de crédit sont : le modèle KMV, dérivé de l'approche structurelle, inspiré par Merton (1974), le modèle Credit Risk+ réalisé par "Credit Suisse Financial Products" et enfin le modèle de JP Morgan's basé sur un modèle de notation. Ces trois modèles se heurtent à des difficultés pour mesurer correctement les spreads à partir des données du marché. La question est de savoir quel est le véritable contenu des spreads et quelle est la part réelle de risque de défaut contenu dans ces spreads.

4.1. Analyse des processus de changement de notes (matrice de transition).

Dans la nouvelle génération des modèles de risque de crédit, les notes attribuées par les agences de notation ou d'autres institutions financières sont le reflet à une date donnée de la qualité de crédit d'un emprunteur qu'il soit une entreprise ou un pays souverain. Ces modèles de prédiction de la migration des notes peuvent être utilisés dans une analyse de la valeur à risque, pour

l'évaluation des prêts ou des dérivés de crédit. Mesurer le risque des obligations non liquides ou non commercialisés peut s'avérer très difficile. Selon les approches de JP Morgan (1997) et Credit Suisse Financial Products (1997) le risque peut être mesuré en examinant la probabilité jointe de transition des notes pour les prêts et emprunts qui composent le portefeuille d'intérêt. La matrice de transition représente alors un élément important pour le calcul de ces probabilités.

Une approche commune pour prédire les futures évaluations consiste à supposer que la matrice de transition des notes suit un processus de Markov. L'hypothèse de Markov, signifie que, pour anticiper la note future, il suffit de considérer l'avant dernière note pour évaluer la probabilité de la note suivante. En effet, cette probabilité conditionelle ne dépend pas de tout l'historique de notation. En d'autres termes, les évaluations futures d'une entreprise dépendent seulement de sa note actuelle.

L'appréciation de la note quant à la qualité de crédit peut varier dans le temps. Rappelons que les matrices de transition renseignent sur l'évolution à horizon d'une ou plusieurs années de la qualité de crédit d'un emprunteur et cela à travers une estimation de la probabilité de migration d'un rating vers un autre. Elles permettent aussi d'estimer la probabilité de défaut de l'emprunteur. Nous constatons empiriquement que les matrices de transition des firmes notées AAA par exemple restent AAA après une année avec une forte probabilité. Leur taux de défaut, c'est-à-dire la probabilité que ces firmes fassent défaut, est nul. Par ailleurs, alors que le taux de défaut d'une contrepartie AAA est nul à l'horizon d'une année, nous constatons qu'il ne l'est pas à deux ans. En supposant que la matrice de transition ne varie pas d'une année à une autre, la probabilité de transition s'écrit :

$$\begin{aligned} P_{0,2}(D\,|AAA) &= P_{0,1}(D\,|AAA).1 + P_{0,1}(AA\,|AAA)P_{1,2}(D\,|AA) + ... \\ &\quad + P_{0,1}(CCC\,|AAA)P_{1,2}(D\,|CCC) \end{aligned}$$

Nous pouvons déduire l'expression généralisée de la matrice de transition. La probabilité de transition d'une note i vers une note j entre les dates 0 et 2 :

$$P_{0,2}(j\,|i) = \sum_{k=1}^{D} P_{0,1}(k\,|i)P_{1,2}(j\,|k)$$

Si l'on suppose que la matrice de transition obéisse à l'hypothèse de stationnarité, c'est-à-dire $P_{0,1}$et $P_{1,2}$ sont égales, l'expression ci-dessus s'écrit de la façon suivante : $P_{0,2} = P_{0,1}^2$ (carré de la matrice $P_{0,1}$).

Cette notion de stationnarité, autrement la matrice de transition est stable dans le temps, introduit le principe de matrice génératrice. Ce qui conduit à l'expression :

$$P_{0,N} = P_{0,1}^N$$

Autrement dit, les probabilités de transition des ratings à un horizon donné T s'expriment de la façon suivante :

$$P_{0,T} = \exp(T\Psi)$$

où Ψ est la matrice génératrice.

Nous rappelons que l'exponentielle d'une matrice X s'écrit sous forme d'un développement en série entière :

$$\exp(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{X^n}{n!}.$$

L'explication en est que les matrices de transition observées sont des réalisations d'un processus de Markov stable. On en tire un parallélisme en économie en ce sens que la variation de croissance économique dépend des périodes de récession et de forte croissance.

De cette propriété, on en déduit l'expression de la matrice génératrice à horizon une année :

$$\Psi(1) = \frac{1}{N}(\Psi(N)).$$

En estimant les probabilités de transition, nous pouvons donc en déduire notamment la dégradation ou non des ratings. On peut assimiler l'évolution des ratings au cours du temps à la forme que peuvent prendre les probabilités de défaut. Ainsi, on observe que même les bonnes notations ont une tendance à la dégradation au cours du temps et cela est dû en particulier à la structure par terme des probabilités de défaut convexe. Une probabilité de défaut marginale croissante en fonction de temps en est l'explication appropriée. Dans le cas d'une mauvaise notation, la probabilité de défaut cumulée dans le temps est une courbe concave. Un émetteur risqué (notation CCC par exemple) avec une probabilité de défaut élevée à court terme peut au-delà d'une année voir son rating s'améliorer. Donc la probabilité de défaut forward sur une année est plus faible que la probabilité de défaut spot sur la même année.

Cela peut s'interpréter économiquement comme un accroissement de la probabilité de défaut dès lors que les ratings se dégradent et par l'auto corrélation observée dans les dégradations. Ainsi, une entreprise récemment dégradée à une probabilité de dégradation plus élevé que celle qui se trouve depuis longtemps au même niveau.

4.2. Calcul des spreads dans les modèles à intensité.

Le spread de crédit est l'écart de rendement entre une obligation émise par une entreprise ou une institution financière avec un taux de référence supposé présenter très peu de risque. On accorde une importance croissante à la relation qui existe entre les changements de notes et les spreads de crédit. La problématique est de savoir s'il est possible de retrouver une relation positive entre le risque de défaut et l'écart de rendement.

Nous nous intéressons dans cette section à la relation entre les spreads de crédit et le risque de défaut. Comme souligné par Duffie et Singleton (1999), les spreads de crédit peuvent être déterminés par l'intensité de défaut, le défaut étant considéré comme un événement imprévisible.

Nous commençons par exposer une situation relativement simple.

4.2.1. *Evaluation d'une obligation dans le cas d'une seule période.*

Supposons que la courbe des taux soit plate, c'est à dire que le taux d'intérêt sans risque soit égal à une constante r. Le prix d'une obligation zéro-coupon sans risque de défaut à une date t intermédiaire est alors donné par :

$$B(t,T) = B(T,T)\exp(-r(T-t)) = \exp(-r(T-t)).$$

Examinons maintenant le cas d'une obligation avec risque de défaut potentiel avant la maturité T. Supposons qu'en cas de défaut, le recouvrement soit nul (perte totale de la valeur nominale). Nous en déduisons que la valeur du zéro-coupon à échéance est donnée par :

$$B_d(T,T) = \mathbb{I}_{T_1>T},$$

où T_1 désigne l'instant de défaut.

Deux cas se présentent alors à l'instant t :

Cas 1 : il y a eu défaut avant t ou à l'instant t
Compte tenu du recouvrement nul, la valeur $B(t,T)$ à l'instant t est nulle.

Cas 2 : il n'y a pas eu défaut avant t ou à l'instant t :
La valeur $B(t,T)$ à l'instant t est donnée par la formule de valorisation classique de non-arbitrage :

$$B_d(t,T) = \exp(-r(T-t))\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[B_d(T,T)/\mathcal{F}_t\right],$$

où $\mathbb{Q}$ désigne la probabilité neutre au risque.

Supposons alors que la loi de T_1 sous $\mathbb{Q}$ soit une loi exponentielle de densité :

$$f(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta}$$

avec $\lambda > 0$.

Nous devons donc calculer :

$$B_d(t,T) = \exp(-r(T-t))\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{I}_{T_1>T}\,|\mathcal{F}_t\right],$$

ce qui est équivalent ici à :

$$B_d(t,T) = \exp(-r(T-t))\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{I}_{T_1>T}\,|T_1>t\right].$$

Nous en déduisons :

$$B_d(t,T) = \exp(-r(T-t))\mathbb{Q}\left[T_1>T\,|T_1>t\right].$$

Compte tenu de l'absence de mémoire de la loi exponentielle, nous obtenons :

$$B_d(t,T) = \exp(-r(T-t))e^{-\lambda(T-t)}.$$

En conséquence, le surcroît de taux sp (le spread) que doit procurer l'obligation avec risque de défaut est donné par :

$$sp = \lambda \tag{6}$$

Supposons maintenant que le recouvrement en cas de défaut soit partiel. Introduisons la variable L vérifiant $0 \leq L < 1$ telle que :

$$B_d(T,T) = (1-L).\mathbb{I}_{T_1 \leq T} + \mathbb{I}_{T_1 > T}.$$

Cas 1 : il y a eu défaut avant t ou à l'instant t

Compte tenu du recouvrement $(1-L)$, la valeur $B(t,T)$ à l'instant t est égale à $(1-L)\exp(-r(T-t))$.

Cas 2 : il n'y a pas eu défaut avant t ou à l'instant t :

La valeur $B(t,T)$ à l'instant t est donnée par la formule de valorisation classique de non-arbitrage :

$$B_d(t,T) = \exp(-r(T-t))\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(1-L).\mathbb{I}_{T_1 \leq T} + \mathbb{I}_{T_1 > T}/T_1 > t\right] \tag{7}$$

Supposons de plus que, sous $\mathbb{Q}$, L et T_1sont indépendantes et notons $\overline{L} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(L)$.

Nous obtenons alors :

$$B_d(t,T) = \exp(-r(T-t))\left[(1-\overline{L})\mathbb{Q}\left[T_1 \leq T\,|T_1 > t\right] + \mathbb{Q}\left[T_1 > T\,|T_1 > t\right]\right]$$

Sous les hypothèses précédentes concernant la loi de T_1 sous $\mathbb{Q}$, nous en déduisons :

$$B_d(t,T) = \exp(-r(T-t))\left[(1-\overline{L})\left(1-e^{-\lambda(T-t)}\right) + e^{-\lambda(T-t)}\right].$$

Par identification, nous devons avoir la relation suivante :

$$\exp(-\left[r+sp\right](T-t)) = \exp(-r(T-t))\left[(1-\overline{L})\left(1-e^{-\lambda(T-t)}\right) + e^{-\lambda(T-t)}\right].$$

Cette relation nous donne la valeur du spread sp :

$$sp = \lambda - \frac{1}{T-t}\ln\left[(1-\overline{L})(e^{\lambda(T-t)}-1)+1\right].$$

Par approximations successives au premier ordre, nous obtenons :

$$sp \simeq \lambda\overline{L}).$$

En conclusion, nous observons que le spread est égal à l'intensité de l'instant de défaut λ multipliée par l'espérance du taux de perte $\overline{L}$.

Ce type de résultat se retrouve dans l'analyse menée par Duffie et Singleton (1999).

4.2.2. *Evaluation d'une obligation dans le cas multipériode.*

Considérons une obligation risquée, évaluée sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$.

Notations :

λ_s : probabilité conditionnelle à l'instant s sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ sachant que le défaut est survenu entre s et $s+1$ compte tenu des informations disponibles à l'instant s en cas de sans défaut de s.

Z_s : taux de recouvrement en unité de compte en cas de défaut à'instant s.

r_s : taux court sans risque de défaut.

Si l'entreprise n'a pas fait faillite à l'instant t, la valeur de marché $B(t,T)$ est la valeur actuelle du montant X_{t+1} en cas du défaut entre t et $t+1$ plus la valeur actuelle de l'obligation $B_{(t+1,T)}$ en cas d'aucun défaut. Ceci signifie :

$$B(t,T) = \lambda_t e^{-r_t}\mathbb{E}_{\mathbb{Q},t}(X_{t+1}) + (1-\lambda_t)e^{-r_t}\mathbb{E}_{\mathbb{Q},t}(B_{(t+1,T)}), \tag{8}$$

où $\mathbb{E}_{\mathbb{Q},t}(.)$ désigne l'espérance sous Q, conditionnelle à l'information disponible aux investisseurs à la date t. Par la résolution de l'équation récursive (8) au cours de la durée de l'emprunt, $B(t,T)$ peut être exprimée de manière équivalente comme suit :

$$B(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q},t}\left[\sum_{j=0}^{T-1}\lambda_{t+j}e^{-\sum_{k=0}^{j}r_{t+k}}_{t+j+1}Z_{t+j+1}\prod_{l=0}^{j}(1-\lambda_{t+l-1})\right]$$

$$+\mathbb{E}_{\mathbb{Q},t}\left[e^{-\sum_{k=0}^{T-1}r_{t+k}}B_d(t,T)\prod_{J=1}^{T}(1-\lambda_{t+j-1})\right]. \tag{9}$$

L'évaluation de la formule de prix est compliquée en général vu la nécessité de faire face à la distribution de probabilité conjointe de Z, r et λ et ce sur divers horizons.

Le point clé que souligne ce modèle de prix est que l'équation (9) peut être simplifiée en considérant l'espérance neutre au risque du recouvrement à l'instant s, en cas de défaut au moment $s+1$, comme une fraction de la valeur risque-neutre attendue de la valeur de marché en cas de survie au temps $s+1$ ["récupération de la valeur du marché" (RMV)].

Sous cette hypothèse, il existe un processus adapté Z, borné par 1, tel que :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q},s}(Z_{s+1}) = (1-L_s)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B(s+1,T)).$$

En substituant RMV dans l'équation (8) , nous obtenons :

$$B(t,T) = (1-\lambda_t)e^{-r_t}\mathbb{E}_{\mathbb{Q},t}(B_{(t+1,T)}) + \lambda_t e^{-r_t}(1-L_t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q},t}(B_{(t+1,T)}) \tag{10}$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q},t}\left[e^{-\sum_{j=0}^{T-1} R_{t+j}} B_d(t,T) \right],$$

avec :

$$e^{-R_t} = (1-\lambda_t)e^{-r_t} + \lambda_t e^{-r_t}(1-L_t)$$

Pour des taux annualisés et des périodes de faible longueur, on peut approcher R_t par la relation :

$$R_t = r_t + \lambda_t L_t.$$

Le spread est donc donné par :

$$sp_t = \lambda_t L_t. \tag{11}$$

L'équation (10) indique que le prix d'une obligation peut être exprimée comme la valeur actuelle du profit attendu $B_d(t,T)$ traitée comme si elle était sans défaut, actualisée en fonction du taux court de défaut ajusté R_t.

Duffie et Singleton (1999) montrent que l'approximation $R_t = r_t + \lambda_t L_t$ du taux court de défaut ajusté est précise et justifiée dans le cadre de temps continu. Cela implique, en supposant que λ_t, et Z_t soient des processus exogènes, que nous pouvons procéder pour le calcul comme dans les modèles d'évaluation standard pour les titres sans défaut, en utilisant par contre un taux d'actualisation qui est le taux de défaut ajusté $R_t = r_t + \lambda_t L_t$ au lieu du taux court habituel r_t.

Par exemple, R peut être paramétré dans un modèle typique simple ou multifactoriel du taux court, y compris le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (1985) et de ses extensions, ou comme dans le modèle de Heath, Jarrow et Morton (1992) (HJM). L'ensemble des résultats concernant la structure à terme des taux sans risque de défaut est immédiatement applicable à l'évaluation des actifs contingents avec risque de défaut potentiel.

La formulation RMV adopte la modélisation générale de dépendance du processus du taux de risque λ et les taux de recouvrement à travers le calcul habituel du prix des obligations sans risque. En outre, λ_t et L_t peuventt dépendre de la structure à terme sans risque. Par ailleurs, on peut aussi tenir compte des effets de liquidité en introduisant un modèle stochastique l comme une fraction du coût de possession de l'instrument de défaut. Nous obtenons alors, sous des conditions techniques relativement peu contraignantes, le modèle d'évaluation qui s'applique au processus de taux court avec défaut ajusté de la liquidité :

$$R_t = r_t + \lambda_t L_t + l \tag{12}$$

En pratique, il est courant de traiter les écarts relatifs aux taux du Trésor plutôt que les taux «purs» sans risque de défaut. Dans ce cas, on peut traiter

le «taux court du Trésor "r" comme un taux «pur» sans risque de défaut. Ensuite, on peut aussi écrire

$$R_t = r_t^* + \lambda_t L_t + l^*,$$

où l^* rend compte des effets relatifs aux autres déterminants du coûts de possession.

4.2.3. *Evaluation d'une obligation dans le cas continu.*

On fixe un espace probabiliste $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un processus de taux court prévisible de sorte qu'il est possible à tout instant t d'investir une unité de compte en dépôt sans défaut et de refinancer le produit jusqu'à une date ultérieure s. A ce stade, nous ne précisons pas encore que r_t est déterminée en fonction d'un vecteur d'état markovien, d'un modèle de taux forward HJM ou selon une autre approche.

Un actif contingent est la donnée d'une paire $(W,\ \tau)$ consistant en une variable aléatoire W et un temps d'arrêt τ au cours de laquelle W est payée. Nous supposons que W est mesurable (de telle sorte que le paiement peut être effectué sur la base des informations actuellement disponibles). Nous prenons comme donnée une mesure équivalente risque-neutre $\mathbb{Q}$ relative au processus du taux court r_t.

Ceci signifie que, pour un actif contingent (W,τ) quelconque donné, le processus de $B(t,T)$ est défini par $B(t,T) = 0$ pour $t \geq \tau$ et

$$B(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp(-\int_t^{\tau} r_u du) W \right] \tag{13}$$

avec $t < \tau$ et où $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ indique l'espérance sous $\mathbb{Q}$.

Nous définissons un actif contingent avec risque de défaut comme une paire$((X,T),(X\prime,T\prime))$ de créances contingentes. La demande soulignée (X,T) est l'obligation de l'émetteur à payer X à la date T. La deuxième demande $(X\prime,T\prime)$ définit le temps d'arrêt $T\prime$ au cours duquel les émetteurs de défaut et les détenteurs de créances reçoivent le paiement $X\prime$. Cela signifie que la demande actuelle (Z,r) générée par actif contingent avec risque de défaut $((X,T),(X\prime,T\prime))$ est défini par :

$$\tau = \min(T,T'), \tag{14}$$

et

$$W = X1_{\{T<T'\}} + X'1_{\{T\geq T'\}}. \tag{15}$$

Nous pouvons assimiler l'obligation soulignée à une obligation à coupon zéro $(X = 1)$, venant à échéance T, ou un titre dérivé sur la base d'autres prix de marché, comme une option sur un indice boursier ou un emprunt d'Etat, avec X aléatoire et basé sur des informations de marché à l'instant T.

Nous pouvons appliquer la notion d'actif contingent avec risque de défaut

$((X,T),(X\prime,T\prime))$ aux cas pour lesquels l'obligation soulignée (X,T) est elle-même la demande actuelle générée par un actif contingent avec risque de défaut plus ancien, comme avec une option OTE ou un dérivé de crédit sur une obligation de l'entreprise. L'émetteur du dérivé peut être lui-même ou différent de celui de l'obligation sous-jacente.

Notre objectif est de définir et de caractériser le processus de prix U de l'actif contingent avec risque de défaut $((X,T),(X\prime,T\prime))$. On suppose que le temps de défaut $T\prime$ à un de taux d'hasard h ayant un risque de défaut neutre au risque, ce qui signifie que le processus Λ, qui est égale à 0 avant le défaut et à 1 après (c'est-à-dire, $\Lambda = 1$ pour $t \geq T\prime$), peut être écrit sous la forme :

$$d\Lambda_t = (1-\Lambda_t)\lambda_t dt + dM_t, \tag{16}$$

où M est une martingale sous $\mathbb{Q}$. On peut interpréter Λ_t comme l'intensité de l'arrivée du saut à l'instant t (sous $\mathbb{Q}$) d'un processus de Poisson dont le premier saut se produit en cas de défaut. De même, la probabilité conditionnelle risque neutre de défaut, étant donné l'information $\mathcal{F}$ disponible à l'instant t, dans le cas d'aucun défaut en t, est approximativement égale à $h_t\Lambda_t$ pour Λ_t petite.

Examinons dans ce contexte les formules de valorisation V_t du type :

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q},t}\left[\exp\left(-\int_t^T r_u du\right) X\right] \tag{17}$$

Nous obtenons alors la formule de valorisation suivante pour le processus de gain G :

$$G_t = \exp\left(-\int_0^t r_u du\right) V_t(1-\Lambda_t) \tag{18}$$

$$+ \int_0^t \exp\left(-\int_0^s r_u du\right)(1-L_s)V_{s-}d\Lambda_s. \tag{19}$$

5. Conclusion

Comme illustré dans ce chapitre, la notion de processus ponctuel marqué est fondamentale pour modéliser les différents aspects du risque de crédit des obligations, que ce soit pour déterminer les risques de défaut ou modéliser le processus de changement de note. Ce chapitre est d'une importance primordiale puisqu'il sert par la suite à modéliser les parcours de notation des firmes en vue de leur estimation en tenant compte notamment de la crise, pour les chapitres trois et quatre. Enfin, il rappelle les notions fondamentales à la mise en place d'une modélisation précise de l'effet de contagion. Dans ce contexte, les rappels faits sur le calcul des espérances conditionnelles par rapport à un processus ponctuel marqué sont fondamentaux pour évaluer les prix des dérivés de crédit, évaluation menée au chapitre cinq.

CHAPITRE 3

Modélisation des parcours de notation des firmes

Ce chapitre[1] étudie la migration des notes de crédit, en introduisant notamment des modèles de durée de type ACD *Autoregressive Conditional Duration*. Nous rappelons dans un premier temps les principales propriétés de ces modèles en mettant l'accent tout particulièrement sur la distribution de Burr. Les applications empiriques portent sur les valeurs du secteur européen, durant la période Août 1989 - Février 2008. Elles illustrent la migration des notes de crédit durant une période de relative stabilité des marchés juste avant les premières conséquences sensibles de la crise financière. A partir de données internes propres à Standard's & Poors, permettant de mieux observer les processus d'attribution de notes, nous montrons comment les changements de notation sont reliés aux durées d'attribution de deux notes consécutives, en étudiant notamment les fonctions de hasard associées à ce processus.

1. Introduction

Comme rappelé au chapitre 1, la notation joue un rôle très important dans l'industrie du crédit. Son but est de fournir une classification qualitative de la solidité, de la solvabilité et des perspectives de la dette de l'entreprise ou du pays considéré. L'importance de la notation du crédit a augmenté de façon significative avec l'introduction du nouveau cadre réglementaire connu sous le nom de Bâle II (BCBS, 2004), en cours de refondation dans le cadre de Bâle III (cf. document de la Bank for International Settlements). Dans ce cadre, la notation est en lien direct avec la détermination de la taille des fonds propres d'une banque, mis en réserve pour couvrir ses risques. La notation et le changement de notation influent donc notamment sur la volonté des banques à octroyer des crédits (à des clients particuliers ou à des entreprises individuelles). En outre, si la notation et, par conséquent, les exigences de fonds propres co-varient avec le cycle économique, les fluctuations économiques peuvent être exacerbées par des capitaux de plus en plus rares dans des conditions économiques défavorables, précisément au moment où il est le plus nécessaire. Il est clair qu'une bonne compréhension du comportement dynamique des notations et des changements des notations est donc importante d'un point de vue réglementaire et du point de vue de la perspective de l'industrie financière.

[1]Ce chapitre a donné lieu à un article intitulé "Modèles ACD pour la migration des notes de crédit". Il a été présenté à la conférence internationale IFC 5 (Hammamet, 2009) ainsi qu'aux Journées de Microéconomie 2010 (Poitiers, Mai 2010).

Dans ce chapitre, nous introduisons un nouveau modèle de transition de la notation. La principale nouveauté de notre modèle est que nous prenons simultanément en compte les transitions des notes (changements éventuels de catégorie) ainsi que les durées entre chaque notation (période entre deux annonces de note consécutives). Cette approche permet de mieux analyser le processus de notation en reliant notamment l'éventuel changement de notes à la date d'annonce de celui-ci. Cette modélisation est donc basée sur les évènements de marché plutôt que sur le temps calendaire (« business time » versus « calendar time »). Ceux-ci sont soumis, par exemple, à la dynamique commune des facteurs latents. Dans ce sens, nous proposons d'appliquer le modèle ACD (modèle de durée conditionnel autorégressif d'Engle & Russell, 1998) à la notation financière afin de modéliser la durée d'attribution entre deux notes consécutives, ce qui nous permet par la suite de construire des matrices de transition appropriées.

Le but essentiel de l'analyse consiste à développer un modèle de durée ayant pour but d'expliquer le parcours des notations financières de 668 entreprises des régions Europe, Asie et Afrique, selon le rating de Standard & Poor's (les données de notre échantillon couvrant la période 1989-2008). Pour cela, il s'agit d'estimer, pour chaque niveau de notation, un modèle autorégressif décrivant les durées logarithmiques conditionnelles. L'accent est mis sur l'estimation des paramètres des fonctions de hasard spécifiques aux différentes notes possibles retenues afin de caractériser les épisodes de notation entre les classes de risque. Plus précisément, chaque fonction de hasard décrit l'évolution de la probabilité instantanée de migrer en temps t d'une classe donnée j vers une classe donnée k ($j, k \in E$, ensemble des notes possibles) en fonction de la durée déjà écoulée de l'épisode considéré.

Le chapitre est organisé comme suit : une première section synthétise la littérature sur la problématique de la notation en risque de crédit. Elle évoque également plus spécifiquement la méthodologie ACD qui permet notamment de relier les variations des notes à la durée d'attribution d'une nouvelle note. Une deuxième section expose l'approche théorique de l'analyse du processus de notation. Enfin, une troisième section examine un échantillon de données empiriques, illustrant notre problématique et la mise en œuvre de notre méthodologie.

2. Revue de la littérature

La littérature sur la modélisation des événements du crédit tels que le taux de défaillance et les changements de notation a connu un développement rapide au cours des 15 dernières années. Wilson (1997) a modélisé le taux de défaillance en utilisant une régression logistique avec des variables macroéconomiques explicatives. Dans le même esprit, Kavvathas (2001), Carling *et al.* (2002), Couderc et Renault (2004), Duffie *et al.* (2006) utilisent une approche de durée relative aux caractéristiques des entreprises et des observations macroéconomiques et montrent que la moyenne du temps de défaillance diminue

si l'activité économique diminue. Koopman et Lucas (2005) et Koopman *et al.* (2005) ont adopté une approche directe en termes de séries chronologiques. Ils ont identifié la nature cyclique de la variation des taux de défaut sur une longue période historique. Fledelius *et al.* (2004) confirment également l'existence de fluctuations au cours du temps de la migration de la notation de crédit. Gagliardini et Gouriéroux (2004), Wendin et McNeil (2007), et Koopman et Lucas (2007) suggèrent d'utiliser des modèles dynamiques avec des composantes latentes. Toutefois, ces modèles sont tous développés dans le cadre du temps calendaire : les transitions de notation sont observées empiriquement à travers des créneaux horaires discrets, par exemple, des années ou des trimestres. Les fréquences observées sont ensuite modélisées par des processus de séries temporelles non-gaussiennes.

La majorité des études empiriques en finance ont employé des données journalières des variables d'intérêt (soit les valeurs d'ouverture soit les valeurs de clôture) en négligeant les observations intra journalières. La plupart du temps, ces analyses sont menées en négligeant l'aspect aléatoire des dates où se produisent les variations (souvent significatives) des variables financières, notamment les variations des prix. S'appuyant sur ces considérations, Engle et Russell (1998) ont développé le modèle ACD qui a pour objectif de modéliser les durées entre deux événements. Depuis son introduction, le modèle ACD et ses diverses extensions sont devenus l'outil primordial dans la modélisation du comportement des irrégularités des durées des données financières, ouvrant les portes aux développements d'études théoriques et empiriques appropriées. Engle et Russell (1998) ont supposé que la dépendance des durées peut être modélisée en appliquant le même principe qu'un modèle GARCH décrivant la dépendance de la volatilité. Cette nouvelle approche combine à la fois la notion de fonction de hasard et le modèle ARCH.

Les travaux précédents ont étudié les causes déterminantes dans l'évolution des notes et ont prouvé qu'elles sont principalement conduites par des principes économiques fondamentaux (voir par exemple Cantor et Parker, 1996). Cependant, la littérature a été relativement parcimonieuse sur la dynamique du changement de rating et notamment sur le lien entre les durées entre deux révisions de note et les notes elles-mêmes. Les transitions des notes constituent des éléments fondamentaux pour beaucoup d'applications dans la gestion moderne des risques et tout particulièrement celui du risque de crédit à travers la gestion d'un portefeuille obligataire avec risque de défaut, l'évaluation des "Credit Default Swaps" (CDS), la conception de produits structurés de crédit tels les " Collaterized Debt Obligations" (CDO) et l'évaluation des dérivés de crédit (voir Frydman et Schuermann, 2007).

La littérature récente a exploré la variation (dite encore "migration") au cours du temps des matrices de transition des notes de crédit. Altman et Kao (1992) ont étudié les liens entre la dynamique des notes et les conditions macroéconomiques fondamentales (voir également Nickell et al., 2000 ; Bangia *et al.*(2002). Dans l'étude de la dynamique de la notation de crédit, Carty (1993)

et Fons (1997) expliquent comment les taux de transitions peuvent être estimés par la méthode dite "de cohorte." Pour remédier à l'insuffisance de cette méthode, Norris (1998) et Jarrow, Lando et Turnbull (1997) ont montré que les chaînes homogènes de Markov en temps discret peuvent être utilisées pour modéliser les processus de transition des notes.

La déviation par rapport à l'hypothèse d'homogénéité a été le sujet de plusieurs études qui mettent en évidence les sources latentes et inobservables d'hétérogénéité comme les caractéristiques de l'émetteur, le pays domicile, le secteur d'activité, le cycle économique, les conditions macroéconomiques .... telles que les études de Nickell, Perraudin et Varatto (2000), Hu, Kiesel et Perraudin (2002), Bangia, Diebold et Kronumus (2002) et Gagliardini et Gourieroux (2005a, 2005b) qui décrivent comment perfectionner l'estimation du nombre et de la dynamique des facteurs influençant les transitions par le modèle probit ordonné en présence d'un facteur inobservable qui permet de prédire le risque futur d'un panel des émetteurs. En outre, Feng, Gouriéroux et Jasiak (2008) explorent la dynamique des matrices de transition des notes d'un point de vue différent. L'analyse de ces auteurs est effectuée dans le cadre d'un modèle qualitatif ordonné qui tient compte explicitement du caractère discret des ratings et s'adapte aux classements de la qualité de crédit. En dépit de la performance de l'estimation des processus de notation à temps discret, Lando et Skodeberg (2002) considèrent l'estimation des taux de transition des notes sur des données historiques observées en temps continu, ce qui permet d'une manière intelligible d'obtenir des estimateurs efficaces de ces taux.

En ce sens, plusieurs auteurs ont adopté un certain nombre de méthodologies alternatives. Citons parmi eux Christensen, Hansen et Lando (2004) qui ont montré qu'une chaîne de Markov à temps continu permet d'obtenir des résultats statiquement significatifs en termes d'estimation de processus de transition des notes. Cette approche a été critiquée du fait que les entités avec la même notation émigrent selon différentes vitesses, une caractéristique qui n'est pas admise dans le modèle de Markov. En effet, Frydman et Schuermann (2008) ont présenté une nouvelle méthode pour le processus de transition des notes en utilisant une alternative à l'approche de Markov. Cette méthode porte le nom de "Markov Mixture Model," à savoir un mélange de deux chaînes de Markov homogènes à temps continu. La différence entre ces deux chaînes réside au niveau de leurs vitesses de migration mais elles ont la même matrice de probabilité de transition.

Tous les inconvénients liés aux modèles markoviens énoncés précédemment ont poussé les chercheurs à utiliser d'autres modèles, par exemple, Stefanescu, Tunrau et Turnbull (2006) qui ont utilisé une simulation basée sur l'approche bayésienne qui tient compte du problème des élans. De plus, Kadam et Lenk (2008) fournissent des estimations bayésiennes pour atténuer les problèmes dûs à l'ampleur des données. Ils considèrent que l'utilisation des instruments d'estimation classiques dans une telle situation peut induire une erreur d'évaluation grave. D'autres tentatives ont été ensuite avancées dans la littérature telle que

celle de Kim et Sohn (2008) qui proposent un modèle de régression à effet aléatoire pour estimer et prédire des probabilités de transition des notes de crédit. En outre Koopman, Lucas et Monteiro (2005) introduisent un nouveau modèle de durée pour évaluer, en temps continu, les transitions des notes de crédit qui sont soumises aux facteurs latents dynamiques communs.

3. Modélisation des parcours de notations financières des firmes

Nous analysons les séries de notes émises par l'agence S&P depuis une vingtaine d'années afin d'appréhender la situation financière et comptable d'un ensemble de firmes. Pour chaque firme, nous retenons dans notre échantillon toutes les notes qui lui ont été réservées par l'agence S&P durant la période retenue pour l'étude. Chaque note est caractérisée par une date d'émission, un ordre d'arrivée et une classification de la firme dans l'une des catégories présentées au chapitre 1. Dans ce qui suit, nous retenons les notes AAA, AA, A, BBB, BB, B,et NR.

Soient $F = 532$ le nombre de firmes présentes dans notre échantillon et N^f le nombre total de changements de note subis par une firme donnée f $(f = 1, 2, \ldots, F)$.

Nous notons dans tout ce qui suit par :

τ_n^f : la date d'arrivée du n-ième changement de note pour la firme f.

$X_{\tau_n}^f$ la classe de risque vers laquelle la note a migré à l'issue de ce changement : $X_{\tau_n}^f \in E$ où $E = \{AAA, AA, A, BBB, BB, B, NR\}$ et $d_n^f = \tau_n^f - \tau_{n-1}^f$, la durée, ou encore le nombre de mois, qui sépare la date d'arrivée du changement de celle de l'attribution de la note précédente.

Ce que nous cherchons à modéliser est un processus joint dont les réalisations sont données, pour chaque firme f $(f = 1, 2, \ldots, F)$, par la série :

$$(y_1^f, y_2^f, \ldots, y_{Nf}^f), \text{où } y_{Nf}^f = (X_{\tau_n}^f, d_n^f).$$

Nous supposons que ces séries sont générées pour l'ensemble des firmes de notre échantillon par un même processus en temps continu X_t, $t \in R$, prenant ses valeurs dans un espace d'états discret E ,X_t étant le type de la dernière note observée à la date t.

Formellement, une réalisation de X_t se définit de la manière suivante :

$$X_t = X_{\tau_{n-1}}^f \forall t \in [\tau_{n-1}^f, \tau_n^f[.$$

La variabilité du processus X_t est indiquée, pour chaque firme, par des sauts qui marquent l'arrivée de changement de note et par la même occasion le passage d'une classe de risque à une autre.

Cette manière de spécifier le parcours de notation des firmes nous conduit à le considérer comme étant un processus ponctuel marqué ("marked point process") (voir Chapitre 2). D'une manière générale, un tel processus correspond à une série de dates d'arrivée (dates de migration des notes vers d'autres classes de risques) avec des caractéristiques qui leurs sont associées (types de

note caractérisant les classes de départ et d'arrivée). Dans ce cadre d'analyse, le parcours de notation de chaque firme peut être reconstitué tout en retraçant pour chaque firme une trajectoire individuelle marquant des épisodes de migration (périodes de temps -nombre de mois- entre deux changements de notes consécutives) qui se succèdent selon son calendrier de notation.

La figure (1) donne le tracé d'un exemple de trajectoire illustrant, pour une firme donnée, l'évolution du processus X_t depuis la date de sa première notation jusqu'à la date de fin de la période d'observation.

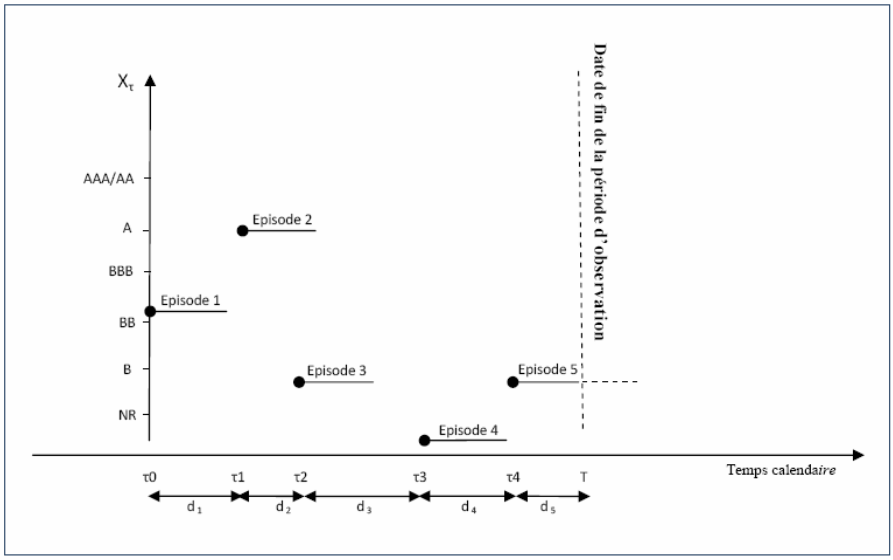


Figure I : Exemple de trajectoire de notation illustrant l'évolution du processus X_t

FIG. 1. Exemple de trajectoire de notation illustrant l'évolution du processus Xt

Cette approche offre la possibilité de pouvoir considérer les dates d'arrivée des changements de note comme endogènes et permet, en conséquence, de modéliser les distributions conditionnelles des durées entre deux évènements successifs. En se situant dans cette perspective, nous écrivons, pour chaque firme f, la fonction de densité de la série de réalisations comme le produit de fonctions de densités marginales et conditionnelles :

$$f(y_1^f, y_2^f, \dots, y_{Nf-1}^f; X_{\tau_0}^f; \theta) = \tag{20}$$

$$f(y_1^f/X_{\tau_0}^f; \theta) \times f(y_2^f/y_1^f, X_{\tau_0}^f; \theta) \times ... \times f(y_{Nf}^f/y_1^f, y_2^f, y_3^f, ...y_{Nf-1}^f/X_{\tau_0}^f; \theta)$$

où θ est un vecteur de paramètres [2].

[2]Cette fonction ainsi que la fonction de vraisemblance sont exprimées conditionnellement au type de la première note qui a été attribuée à chaque firme par l'agence de notation S&P

D'après (20), Il est clair que, pour pouvoir progresser, il faut exprimer pour chaque épisode n ($n = 1, 2, \ldots, N^f$), la distribution jointe du couple $(X^f_{\tau_n}, d^f_n)$. Pour simplifier, nous supposons que, conditionnellement à toutes les réalisations passées du processus, cette dernière ne peut dépendre que de la réalisation passée la plus récente, y^f_{n-1}.

Dans ces conditions, nous pouvons représenter la formule (20) de la manière suivante :

$$f(y^f_1, y^f_2, \ldots, y^f_{N^f-1}; X^f_{\tau_0}; \theta) = \prod_{n=1}^{N^f} g_{X^f_{\tau_{n-1}}}(X^f_{\tau_n}, d^f_n / I^f_{n-1}; \theta) \tag{21}$$

où $g_{X^f_{\tau_{n-1}}}(X^f_{\tau_n}, d^f_n / I^f_{n-1}; \theta)$ désigne la fonction de densité de la probabilité jointe du couple $(X^f_{\tau_n}, d^f_n)$ relatif au $n^{ième}$ épisode. La valeur de cette fonction traduit pour chaque firme f, la probabilité jointe que le $n^{ième}$ épisode de migration de note soit d'une durée de d^f_n mois, et qu'il soit caractérisé par un passage vers une classe de risque k. Cette valeur est établie conditionnellement au type de note observé en début d'épisode $X^f_{\tau_{n-1}}$, (classe de risque initiale), et à toute l'information qui est jusque là disponible sur le passé du parcours de notation de la firme f, I^f_{n-1}.

En s'appuyant sur la présentation générale des modèles de durée à risques concurrents[3], le type de note observé à la fin de chaque épisode peut être considéré comme l'une des destinations possibles, indépendantes et exclusives, que peut emprunter un processus joint de K variables latentes indépendantes :

$$D^f_{n,k}; k = AAA, AA, \ldots, NR.$$

$D^f_{n,k}$étant la durée (le nombre de mois) d'attente depuis l'avènement du $(n-1)^{ème}$ changement de note de l'arrivée d'un nouveau changement de note à l'issue duquel cette dernière migre vers la classe de risque k. Le type de note k que l'on enregistre en fin d'épisode est celui qui associe la durée la plus faible, c'est à dire que nous avons :

$$D^f_{n,k} = \min\left\{D^f_{n,AAA}, D^f_{n,AA}, ..., D^f_{n,NR}\right\}.$$

Celle-ci étant la seule durée que l'on peut observer de manière complète ($i.e. D^f_n = D^f_{n,k}$), les autres durées sont toutes considérées comme incomplètes et plus précisément comme censurées à droites ($i.e. D^f_n < D^f_{n,j}; j \neq k$).

La distribution marginale de chaque variable $D^f_{n,k}(k = AAA, AA, \ldots, NR)$ peut être caractérisée par sa fonction de hasard conditionnelle :

$$h_{X^f_{\tau_{n-1}},k}\left(d^f_n / I^f_{n-1}; \theta_{j,k}\right).$$

La valeur de cette fonction exprime pour chaque firme f (conditionnellement au type de note observé en début d'épisode $X^f_{\tau_{n-1}}$), le risque instantané

[3]Pour plus de détails sur ces modèles, on peut se référer à Lancaster (1990, p. 106).

d'arrivée d'un nouveau changement de note accompagné d'un passage vers la classe de risque k ,sachant qu'aucun autre changement de note n'a été enregistré jusque là, d_n^f mois après la date du dernier changement de note en cours. Cette valeur est aussi appelée taux instantané de transition afin de mettre l'accent sur le fait que l'achèvement d'un épisode équivaut la transition (migration) d'une classe de risque vers une autre.

En considérant la fonction de survie conditionnelle de D_n^f :

$$S_{X^f_{\tau_{n-1}},k}(d_n^f/I_{n-1}^f;\theta) = \exp\left\{-\int_0^{d_n}\sum_{l\in E} h_{X^f_{\tau_{n-1}},k}(u/I_{n-1}^f;\theta_1)du\right\} \tag{22}$$

avec : $\theta = (\theta_{AAA}, \theta_{AA}, ..., \theta_{NR})$ *et* $X^f_{\tau_{n-1}} \in E$ et la fonction de hasard conditionnelle, $h_{X^f_{\tau_{n-1}},k}(d_n^f/I_{n-1}^f;\theta_k)$, nous pouvons exprimer la fonction de densité de la probabilité jointe du couple $(X^f_{\tau_n}, d_n^f)$ de la manière suivante :

$$g_{X^f_{\tau_{n-1}}}(d_n^f, k/I_{n-1}^f;\theta) = h_{X^f_{\tau_{n-1}},k}(d_n^f/I_{n-1}^f;\theta_k)\exp\left\{-\int_0^{d_n^f}\sum_{l\in E} h_{X^f_{\tau_{n-1}},l}(\frac{u}{I_{n-1}^f};\theta_1)du\right\} \tag{23}$$

avec : $\theta = (\theta_{AAA}, \theta_{AA}, ..., \theta_{NR})$ *et* $X^f_{\tau_{n-1}} \in E$.

Ainsi établie, l'équation 23 nous donne les moyens d'exprimer la contribution de chaque épisode de migration à la fonction de vraisemblance comme le produit de :

- La fonction de densité de la durée complète. Celle-ci est retenue pour la durée latente associée au type de note k que l'on observe en fin d'épisode .
- Des fonctions de survie des autres durées censurées. Ces dernières étant associées chacune à l'une des durées latentes relatives aux autres types de note $l; l \neq k$.

La fonction de vraisemblance pour l'ensemble des firmes est donc donnée par :

$$L(\theta) = \prod_{f=1}^{F}\prod_{n=1}^{N^f} g_{X^f_{\tau_{n-1}}}(X^f_{\tau_n}, d_n^f/I_{n-1}^f;\theta) \tag{24}$$

$$= \prod_{f=1}^{F}\prod_{n=1}^{N^f}\prod_{k\in E}\left[h_{X^f_{\tau_{n-1}},k}(d_n^f/I_{n-1}^f;\theta_k)^{I(X^f_{\tau_n}=k)} \times s_{X^f_{\tau_{n-1}}}(d_n^f/I_{n-1}^f;\theta_k)\right]^{1-\delta_n^f}$$

$$\times\left[S_{X^f_{\tau_{n-1}}}(T-\tau_{n-1}^f/I_{n-1}^f;\theta_k)\right]^{\delta_n^f}$$

Cette expression peut encore s'écrire sous la forme :

$$\prod_{k\in E}\prod_{f=1}^{F} L_k^f(\theta_k) \tag{25}$$

Avec :

$$L_k^f(\theta_k) = \tag{26}$$

$$\prod_{n=1}^{N^f} \left[h_{X^f_{\tau_{n-1}},k}(d_n^f/I_{n-1}^f;\theta_k)^{I(X^f_{\tau_n}=k)} \times S_{X^f_{\tau_{n-1}}}(d_n^f/I_{n-1}^f;\theta_k) \right]^{1-\delta_n^f} \times$$

$$\left[S_{X^f_{\tau_{n-1}}}(T-\tau_{n-1}^f/I_{n-1}^f;\theta_k) \right]^{\delta_n^f},$$

Où :

$$l(X^f_{\tau_n}=k) = \begin{cases} 1 \; si \; X^f_{\tau_n}=k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et

$$\delta_n^f = \begin{cases} 1 \text{ si l'épisode d'ordre n de la firme f est censuré à droite} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour les firmes n'ayant pas connu de changement de note durant la période d'observation, l'expression de $L_k^f(\theta_k)$ est réduite à : $S_{X^f_{\tau_0}}(T-\tau_0/I_0^f;\theta_k)$.

Étant donné que chaque fonction $L_k^f(\theta_k)$ ne dépend que du vecteur de paramètre θ_k, l'estimation de l'ensemble des paramètres du processus $\theta = (\theta_{AAA}, \theta_{AA}, ..., \theta_{NR})$, peut être obtenue en procédant à la maximisation de manière indépendante des fonctions $L_k^f(\theta_k)$ par rapport au vecteur de paramètres correspondant $\theta_k, k = AAA, AA, \ldots, NR$.

En optant dans le cadre de spécification des fonctions $h_{X^f_{\tau_{n-1}},k}(d_{n,k}^f/I_{n-1}^f;\theta_k)$ et $S_{X^f_{\tau_{n-1}}}(d_{n,k}^f/I_{n-1}^f;\theta_k)$ pour les modèles Log-ACD (Durée Conditionnelle Autorégressive), nous supposons que les réalisations $d_{n,k}^f; n = 1, 2, \ldots, N^f - 1$, sont dépendantes d'un épisode à l'autre.

Cette dépendance temporelle est exprimée à l'instar d'Engle et Russel (1998) par une structure autorégressive que nous retenons pour modéliser les espérances conditionnelles des durées latentes. Dans ce cadre d'analyse, nous supposons que chaque réalisation $d_{n,k}^f (k = AAA, AA, \ldots, B)$, peut se présenter comme le produit de deux composantes indépendantes :

– Une première composante déterministe :

$$\Psi^f_{n,k\ /X^f_{\tau_{n-1}}} \alpha \ln \left[E\left(D_n^f/I_{n-1}^f \right) \right]$$

qui est proportionnelle au logarithme de l'espérance conditionnelle de la durée de l'épisode n.

– Une deuxième composante aléatoire dont les termes ε_n, sont identiquement et indépendamment distribués I_{n-1}^f , étant toute l'information disponible sur la firme f à la date τ_{n-1}^f.

Sur le plan formel, le processus de durée de notation est exprimé pour chaque firme f de la manière suivante :

$$d^f_{n,k} = \exp(\Psi^f_{n,k\ /X^f_{\tau_{n-1}}})\varepsilon_{n,k} \tag{27}$$

pour $n = 2, \ldots, N^f - 1$

$$\Psi^f_{n,k\ /X^f_{\tau_{n-1}}} = w_{X^f_{\tau_{n-1},k}} + \alpha_k \varepsilon_{n-1,k} + \beta_k \Psi^f_{n-1,k/X^f_{\tau_{n-2}}} + \delta_k n \tag{28}$$

avec $\mid \beta_k \mid < 1$.

Pour $n = 1$:

$$\Psi^f_{1,k\ /X^f_{\tau_0}} = w_{X^f_{\tau_0,k}} + \delta_k \tag{29}$$

Avec $E\left(D^f_{n,k}/I^f_{n-1}\right) = \mu_k \exp(\Psi^f_{n,k/\ X^f_{\tau_{n-1}}})\ E\left(\varepsilon_{n,k}/I^f_{n-1}\right) = \mu_k$
et $Var\left(\varepsilon_{n,k}/I^f_{n-1}\right) = \sigma^2_k$.

Pour compléter l'écriture de la fonction de vraisemblance nous supposons, pour chaque destination k ($k = A, AA, \ldots, BBB$), que les termes $\varepsilon_{n,k}$ sont distribués selon une loi de Burr avec la fonction de densité suivante :

$$f_k(\varepsilon_{n,k}) = \frac{\gamma_k \mu_k^{\gamma_k} \varepsilon_{n,k}^{\gamma_{k-1}}}{\left[1 + \sigma^2_{v_k} \mu_k^{\gamma_k} \varepsilon_{n,k}^{\gamma_k}\right]^{1+\frac{1}{\sigma^2_{v_k}}}} \tag{30}$$

avec $\gamma_k > \sigma^2_{v_k} > 0$ et une moyenne donnée par :

$$\mu_k = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma_k})\Gamma(\frac{1}{\sigma^2_{v_k}} + \frac{1}{\gamma_k})}{\sigma^2_{v_k}(1+\frac{1}{\gamma_k})\Gamma(1+\frac{1}{\sigma^2_{v_k}})} \tag{31}$$

En procédant à un simple changement de variables, on peut voir que conditionnellement à I^f_{n-1}, la distribution de $D^f_{n,k}$ est aussi donnée par une loi de Burr de paramètres :

$$\left(\left[\frac{\mu_k}{\Psi^f_{n,k\ /X^f_{\tau_{n-1}}}}\right]^{\gamma_k}, \gamma_k, \sigma^2_{v_k}\right) \tag{32}$$

ayant la fonction de hasard suivante :

$$h_{X^f_{\tau_{n-1}}}(X^f_{\tau_n}, d^f_n/I^f_{n-1}; \theta) = \frac{\gamma_k \mu_k \Psi^f_{n,k\ /X^f_{\tau_{n-1}}} \left(\frac{d^f_n}{\Psi^f_{n,k\ /X^f_{\tau_{n-1}}}}\right)^{\gamma_k - 1}}{\left[1 + \sigma^2_{v_k}\left(\frac{d^f_n}{\Psi^f_{n,k\ /X^f_{\tau_{n-1}}}}\right)^{\gamma_k}\right]} \tag{33}$$

Le recours à une distribution de type Burr offre une plus grande flexibilité au profil de la fonction de hasard que les lois traditionnelles telles que les lois exponentielles, Weibull et Log-logistique. En effet, ces dernières ne sont autres

que des cas particuliers de la loi de Burr, et imposent par conséquence des hypothèses plus restrictives dans l'expression des fonctions de hasard.

En effet, lorsque le paramètre $\sigma^2_{v_k}$est proche de zéro, la distribution de Burr est réduite à une distribution de Weibull de paramètres :

$$\left(\left[\frac{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma_k})}{\Psi^f_{n,k\ /X^f_{\tau_{n-1}}}} \right]^{\gamma_k} , \gamma_k \right)$$

avec $\gamma_k > 0$.

Contrairement à la distribution de Burr, la fonction de hasard conditionnelle d'une loi Weibull est monotone. Elle est strictement croissante en fonction de la durée $\gamma_k > 1$, strictement décroissante pour $\gamma_k < 1$, et reste constante pour $\gamma_k = 1$.

Dans ce dernier cas, la loi de Weibull est réduite à une loi exponentielle de paramètre $(\Psi^f_{n,k\ /X^f_{\tau_{n-1}}})^{-1}$.

En revanche, si le paramètre $\sigma^2_{v_k}$est égal à 1, nous nous retrouvons avec une distribution Log-logistique de paramètres :

$$\left(\left[\frac{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma_k})\Gamma(1-\frac{1}{\gamma_k})}{\Psi^f_{n,k\ /X^f_{\tau_{n-1}}}} \right]^{\gamma_k} , \gamma_k \right),$$

avec $\gamma_k > 1$. Dans ce dernier cas, la fonction de hasard est croissante dans un premier temps, atteint un maximum pour être décroissante au-delà.

Sur un autre plan, la loi de Burr, que Lancaster (1990) présente comme un mélange de distributions Weibull et Gamma, nous donne les moyens de tenir compte de l'hétérogénéité entre les firmes. On sait évidemment que les sources de cette hétérogénéité sont inévitables[4], et qu'elles ont pour conséquence de biaiser les estimations, en particulier, si elles ne sont pas suffisamment contrôlées au niveau de l'équation 22. D'où l'idée, d'introduire dans les fonctions de hasard une composante prenant en compte l'hétérogénéité non mesurée entre les firmes. Cette hétérogénéité nous la présentons par un terme aléatoire v. Ce terme est considéré comme indépendant de D^f_net supposé suivre une loi Gamma de moyenne 1 de variance (inconnue)σ^2_v.

L'estimation du vecteur de paramètres θ nous offre la possibilité de procéder au calcul de certaines fonctions qui sont utiles pour l'appréhension et l'étude des parcours de notation des firmes. On peut penser, à ce niveau, aux probabilités de transition entre types de notations.

Ainsi, en réécrivant (23) de la manière suivante :

$$g^{(n)}_j(d^f_n, k/I^f_{n-1}; \theta_j) =$$

[4]On peut citer à titre d'exemple, l'appartenance sectorielle, la taille de la firme, le pays d'origine, le marché de cotation, etc...

$$\frac{h_{j,k}^{(n)}(d_n^f/I_{n-1}^f;\theta_{j,k})}{h_j^{(n)}(d_n^f/I_{n-1}^f;\theta_{j,k})} \times h_j^{(n)}(d_n^f/I_{n-1}^f;\theta_{j,k}) \times \exp\left\{-\int_0^{d_n}\sum_{l\in E} h_{j,l}^{(n)}(u/I_{n-1}^f;\theta_{j,l})du\right\}, \tag{34}$$

$$= \pi_j^{(n)}(d_n^f/I_{n-1}^f;\theta_{j,k}) \times g_j^{(n)}(d_n^f, k/I_{n-1}^f;\theta_j) \tag{35}$$

avec

$$\pi_j^{(n)}(d_n^f/I_{n-1}^f;\theta_{j,k}) = \frac{h_{j,k}^{(n)}(d_n^f/I_{n-1}^f;\theta_{j,k})}{h_j^{(n)}(d_n^f/I_{n-1}^f;\theta_{j,k})}, \tag{36}$$

et

$$g_j^{(n)}(d_n^f, k/I_{n-1}^f;\theta_j) = \sum_{l\in E} h_{j,l}^{(n)}(u/I_{n-1}^f;\theta_{j,l}) \times \exp\left\{-\int_0^{d_n}\sum_{l\in E} h_{j,l}^{(n)}(u/I_{n-1}^f;\theta_{j,l})du\right\}. \tag{37}$$

Nous pouvons exprimer pour chaque épisode de notation $n(n = 1, 2, \dots, N^f - 1)$, la probabilité de transition d'une note de type j , vers une autre de type k $(j, k \in E)$ à partir de l'expression suivante :

$$\pi_{j,k}^{(n)}(\theta_{j,k}/I_{n-1}^f) = E_{D_n^f}\left[\pi_{j,k}^{(n)}(u/I_{n-1}^f;\theta_{j,k})\right]$$

$$= \int_0^{+\infty} h_{j,k}^{(n)}(u/I_{n-1}^f;\theta_{j,k}) \times s_j^{(n)}(u/I_{n-1}^f;\theta_j)du. \tag{38}$$

De même, nous pouvons nous servir de l'équation (38) pour établir une estimation de la durée moyenne entre deux changements de notes consécutifs. En particulier, dans le cas où la note du début de l'épisode n est de type j $(j \in E)$, elle peut être exprimée de la manière suivante :

$$E(d_n^f/X_{\tau_{n-1}}^f = j, X_{\tau_{n-1}}^f = k; I_{n-1}^f) \tag{39}$$

$$= \int_0^{+\infty} u\sum_{l\in E} h_{j,l}^{(n)}(u/I_{n-1}^f;\theta_{j,l}) \times s_j^{(n)}(u/I_{n-1}^f;\theta_j)du.$$

Si de plus, cette même note serait suivie d'une note de type $k(k \in E)$, l'équation(39) devient :

$$E(d_n^f/X_{\tau_{n-1}}^f = j, X_{\tau_{n-1}}^f = k; I_{n-1}^f) = \int_0^{+\infty} u\frac{h_{j,k}^{(n)}(u/I_{n-1}^f;\theta_{j,k})}{\pi_{j,k}^{(n)}(\theta_{j,k}/I_{n-1}^f)} \times s_j^{(n)}(u/I_{n-1}^f;\theta_j)du. \tag{40}$$

4. Les données

L'échantillon étudié retrace les parcours de notation d'un échantillon de 668 firmes de la région Europe, Asie et l'Afrique par l'agence S&P [5] sur une période de vingt ans, allant du premier Août 1989 au 21 février 2008. Il s'agit ici de données internes, ce qui permet d'avoir une information beaucoup plus précise sur le mécanisme d'attribution des nouvelles notes par rapport à des données simplement publiques.

Nous avons retenu dans notre échantillon l'ensemble des entreprises notées par S&P, opérantes sur 12 secteurs d'activités différents, à savoir :

-Secteur automobile
-Secteur des matériaux de construction
-Secteur des biens d'investissement
-Secteur chimique
-Secteur des biens de consommation
-Secteur de l'énergie
-Secteur des technologies avancées
-Secteur hôtelier
-Secteur médiatique
-Secteur métallique et minier
-Secteur des emballages
-Secteur de distribution

Nous allons commencer par regrouper l'ensemble des entreprises ayant connu un changement de notation par l'agence S&P (Long Term Foreign Issuer Credit Rating) durant cette période. Les ratings S&P d'émetteur (Issuer Credit Rating) reflètent la capacité financière de l'entreprise à honorer ses engagements financiers et à assurer le service de l'ensemble de ses dettes financières.

Il convient de signaler que nous avons ôté les signes positif et négatif des différentes notes , ce qui nous permet d'avoir une estimation plus fiable. Notre échantillon final est constitué de 1595 épisodes de notation que nous classons selon les marques (type de note) portées en début et fin de période. L'ensemble des données a été préparé selon le mode de dénombrement où chaque firme est traitée comme une grappe que nous présentons par un ensemble de lignes dont chacune correspond à un épisode.

[5]Cette agence est détenue à 100 % par la maison d'édition McGraw-Hill qui publie notamment le journal Business Week . Son principal actionnaire est la société d'investissement Capital World, laquelle détient aussi une participation dans Moody's Corporation.

Le tableau 1 donne la répartition de l'échantillon selon les types de notes enregistrées en début et fin d'épisode. La lecture de ce tableau montre que les notes observées au début des épisodes (les éléments de la dernière colonne du tableau I) ont tendance à se répartir de manière assez équivalente entre les différentes catégories de notation avec des taux qui se situent entre $21,6\%$ et $23,6\%$. Cette tendance semble ne pas s'appliquer à la catégorie AAA/AA qui ne représente respectivement que $9,2\%$ des cas recensés.

TAB. 1. Dénombrement des épisodes de notation en fonction du type de note enregistrée en début et fin de période

		Type de note enregistré en fin d'épisode de notation						
Type de note enregistré en début d'épisode de notation		AAA AA	A	BBB	BB	B	NR	Total
AAA/AA	Effectif	61	63	1			21	146
	% ligne	41,80	43,20	0,70			14,40	100
	% colo	81,30	21,30	0,30			7,40	9,20
A	Effectif	11	193	116	2		48	370
	% ligne	3,00	52,20	31,40	0,50		13,00	100
	% colo	14,70	65,20	31,40	0,70		17,00	23,20
BBB	Effectif	2	39	210	59	4	49	363
	% ligne	0,60	10,70	57,90	16,30	1,10	13,50	100
	% colo	2,70	13,20	56,90	21,30	1,40	17,30	22,80
BB	Effectif		1	38	139	96	71	345
	% ligne		0,30	11,00	40,30	27,80	20,60	100
	% colo		0,30	10,30	50,20	32,50	25,10	21,60
B	Effectif	1		4	77	195	94	371
	% ligne	0,30		1,10	20,80	52,60	25,30	100
	% colo	1,30		1,10	27,80	66,10	33,20	23,30
Total	Effectif	75	296	369	277	295	283	1595
	% ligne	4,70	18,60	23,10	17,40	18,50	17,70	100
	% colo	100	100	100	100	100	100	100

Le même constat peut être fait lorsque l'on s'intéresse aux notes observées en fin d'épisode (les éléments en gras de la dernière ligne du tableau 1). D'ailleurs, on peut constater qu'à ce niveau les catégories AAA et AA ont fait l'objet d'un regroupement, étant donné le nombre très faible d'observations enregistrées pour cette dernière catégorie (deux observations seulement).

Nous pouvons aussi constater l'existence de cases vides qui traduisent l'absence d'observations pour certains croisements.

L'avant dernière colonne du tableau indique les épisodes qui n'ont pas donné lieu à une notation en fin de période. Cette situation indiquée par NR (No Rating) soulève le problème mathématique selon lequel la matrice de transition ne se présente pas dans ce cas comme une matrice carrée.

L'idée qui consiste à écarter de l'analyse ce type d'épisode peut être à l'origine d'un biais de sélection étant donné que la part des situations de No Rating a tendance à augmenter dans notre échantillon au fur et à mesure que l'on passe des classes à risque faible vers des classes à risque élevé (cf. les valeurs indiquées en gras au niveau de l'avant dernière colonne du tableau 1). Pour notre part, nous avons considéré cette situation comme un indicateur supplémentaire d'une détérioration de la qualité du risque et nous l'avons traité comme une issue supplémentaire correspondant à une variable aléatoire latente, $D^f_{n,NR}$, indépendante des autres variables $AAA/AA, AA, \ldots, BBB, \ldots, B$.

TAB. 2. La durée moyenne des épisodes de notation en fonction du type de note enregistrée en début et fin de période

	Type de note enregistré en fin d'épisode de notation						
Type de note enregistré en début d'épisode de notation	AAA/AA	A	BBB	BB	B	NR	Total
AAA/AA	34,335	31,673	37,352			33,273	34,327
A	25,79	22,923	24,866	26,036		23,954	23,82
BBB	22,743	20,972	20,44	21,611	17,529	20,992	20,715
BB		16,304	17,61	15,248	13,21	16,156	16,013
B	18,416		19,04	16,845	13,989	16,915	17,049
Total	23,767	21,792	23,862	23,197	19,433	22,258	22,385

La lecture du tableau 2 montre que la durée moyenne d'un épisode de notation est de 22.385 mois, soit l'équivalent d'une période d'à peu près de deux ans. Là encore, la durée moyenne des épisodes de notation semble diminuer, tout comme la part des situations de No Rating, au fur et à mesure que l'épisode de migration concerne des firmes appartenant au départ à des classes de risque plus élevées.

Le dénombrement des épisodes de notation en fonction de leur ordre est présenté dans le tableau 3. Brièvement, environ 58% des firmes échantillonnées ont connu deux épisodes de notation ou plus, le nombre maximal étant de 11 épisodes.

TAB. 3. Episodes de notation

Ordre de l'épisode	Nombre d'épisodes	Pourcentage d'épisodes
1	668	$41,9\%$
2	422	$26,5\%$
3	224	$14,0\%$
4	130	$8,2\%$
5	62	$3,9\%$
6	33	$2,1\%$
7	21	$1,3\%$
8	17	$1,1\%$
9	9	$0,6\%$
10	7	$0,4\%$
11	2	$0,1\%$
Total	1595	100%

5. Résultats et interprétations

Le but essentiel de l'analyse est d'estimer les paramètres des fonctions de hasard spécifiques aux différents types de transition. Chaque fonction décrit l'évolution de la probabilité instantanée de migrer en temps t d'une classe donnée j vers une classe donnée k $(j, k \in E)$ en fonction de la durée déjà écoulée de l'épisode considéré. D'un point de vue statistique, ceci revient à faire l'hypothèse, que pour chaque destination, les observations sont distribuées de manière identique (i.e. l'hypothèse d'homogénéité inter-firme du processus de durée).

Ces fonctions de hasard sont utilisées, dans un second temps, dans l'estimation des matrices de transition et des durées moyennes des épisodes de transition entre les différentes classes de risque retenues.

5.1. Les fonctions de hasard.

Les résultats de l'estimation des paramètres du modèle par la méthode du maximum de vraisemblance sont donnés dans les tableaux 4 et 5 (nombre d'observations = 1595)

TAB. 4. Estimation des paramètres des fonctions de hasard (1)

Paramètres	AAA / AA	A	BBB
γ_k	1.2837^{***}	1.2863^{***}	1.3922^{***}
	(0.1085)	(0.1843)	(0.1052)
$\sigma^2_{v_k}$	0.1709^{***}	0.1883^{***}	0.3976^{***}
	(0.0535)	(0.0752)	(0.0475)
$w_{AAA/AA-k}$	5.2421^{***}	5.3165^{***}	7.7827^{***}
	(0.7732)	(0.2417)	(0.7552)
w_{A-k}	7.0232^{***}	4.8853^{***}	4.8170^{***}
	(0.6576)	(0.2819)	(0.1538)
w_{BBB-k}	7.8227^{***}	6.1041^{***}	4.2280^{***}
	(0.9465)	(0.3485)	(0.1502)
w_{BB-k}	11.3760^{***}	11.7136^{***}	5.3023^{***}
	(1.5070)	(1.1193)	(0.2229)
w_{B-k}	8.0823^{***}	11.6851^{***}	6.8372^{***}
	(0.8688)	(2.0416)	(0.3966)
α_k	-0.1316	-0.1590^{***}	-0.0769
	(0.0981)	(0.0510)	(0.0603)
β_k	-0.1896^{***}	-0.2801^{***}	-0.0896^{**}
	(0.0337)	(0.0208)	(0.0391)
θ_k	-0.0468^{***}	-0.2108^{***}	-0.2098^{***}
	(0.0150)	(0.0533)	(0.0249)
Log-vrais	-326.3258	-1168.5416	-1468.1049

a- *** : Valeur significative

b- Les termes entre () désignent les écarts types estimés

Les deux premières lignes de ces deux tableaux montrent que les paramètres γ_k et $\sigma^2_{v_k}$ sont significativement différents de zéro pour toutes les classes de risque autres que la classe NR où le deuxième paramètre semble ne pas être significatif.

Le caractère significatif et positif du paramètre $\sigma^2_{v_k}$ justifie pleinement le recours à des distributions de type Burr pour spécifier les processus de durée retenue pour les variables latentes $D^f_{n,k}; k \in E - \{NR\}$. Cependant, c'est la distribution de Weibull qui semble être la mieux adaptée dans le cas de la classe NR.

Mais en regardant les valeurs enregistrées par le paramètre γ_k, nous pouvons constater qu'elles sont toutes significativement supérieures à 1, et conduisent

TAB. 5. Estimation des paramètres des fonctions de hasard (2)

Paramètres	BB	B	NR
γ_k	1.3243^{***}	1.2367^{***}	1.2231^{***}
	(0.1851)	(0.1428)	(0.0600)
$\sigma^2_{v_k}$	0.4092^{***}	0.3579^{***}	0.0060
	(0.0761)	(0.0839)	(0.0168)
$w_{AAA/AA-k}$	10.6648^{***}	10.0655^{***}	4.7707^{***}
	(3.1458)	(1.8733)	(0.2030)
w_{A-k}	8.3623^{***}	10.5233^{***}	4.7501^{***}
	(0.6310)	(1.9243)	(0.1632)
w_{BBB-k}	5.5736^{***}	7.6479^{***}	4.6196^{***}
	(0.3039)	(0.6215)	(0.1718)
w_{BB-k}	4.5352^{***}	4.5911^{***}	3.8893^{***}
	(0.3939)	(0.4589)	(0.1493)
w_{B-k}	5.0662^{***}	4.0476^{***}	3.5594^{***}
	(0.3265)	(0.4517)	(0.1288)
α_k	-0.1427^{**}	-0.0118	-0.3566^{***}
	(0.0687)	(0.0545)	(0.1190)
β_k	-0.2348^{***}	-0.0932^{***}	-0.5683^{***}
	(0.0239)	(0.0231)	(0.0362)
θ_k	-0.1550^{***}	-0.0700^{***}	-0.1557^{***}
	(0.0364)	(0.0131)	(0.0307)
Log-vrais	-1085.1885	-1041.9592	-1299.8867

à retenir, par la même occasion, la conviction de l'existence d'une dépendance du taux de hasard (risque de changement de la note) à l'égard du temps déjà passé dans une classe de risque depuis le début d'un épisode donné. Dans le cas d'une distribution de type Burr, cela signifie que le risque croît dans un premier temps avec la durée, atteint un maximum puis décroit au-delà. Tandis que dans le cas d'une distribution de type Weibull, cela signifie que le risque est strictement croissant, contrairement au cas d'une distribution exponentiel ($i.e. \gamma_k = 1$) où ce dernier reste toujours constant.

Les fonctions de hasard spécifiques estimées pour chaque destination possible sont illustrées dans la figure (2). Elles sont établies en imposant pour chaque cas que la valeur de la quantité $\Psi^f_{n,k\ /X^f_{\tau_{n-1}}}$ soit égale à sa moyenne calculée à partir de l'échantillon.

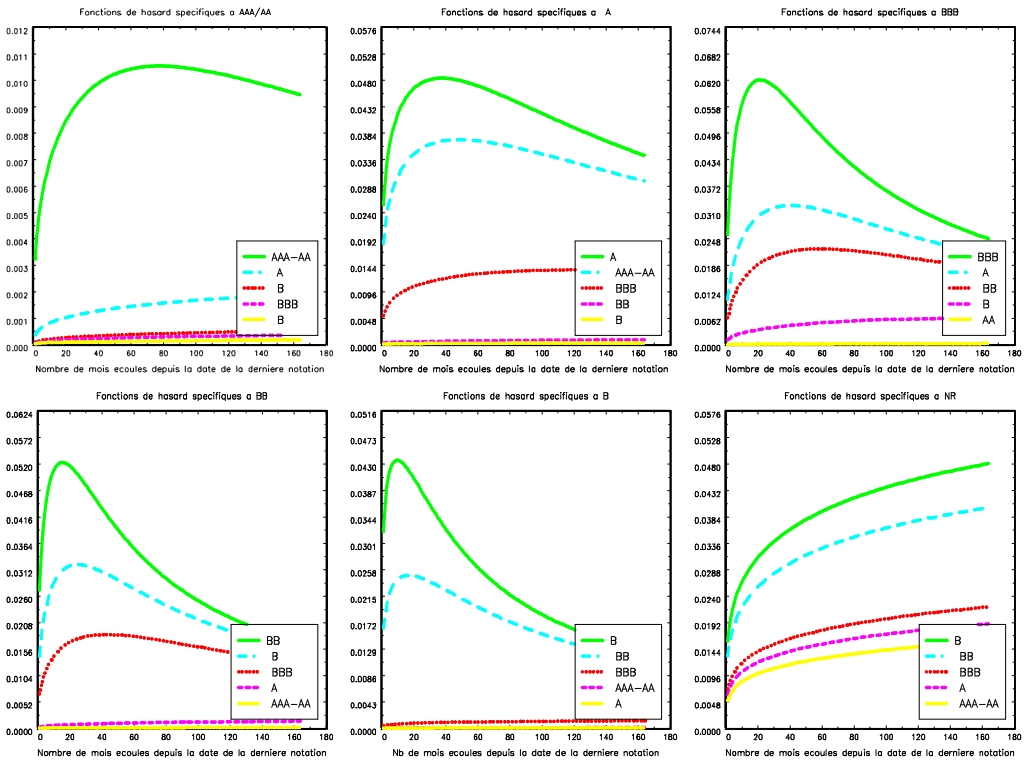

Fonctions de hasard specifiques a AAA/AA
Nombre de mois ecoules depuis la date de la derniere notation
Fonctions de hasard specifiques a A
Nombre de mois ecoules depuis la date de la derniere notation
Fonctions de hasard specifiques a BBB
Nombre de mois ecoules depuis la date de la derniere notation
Fonctions de hasard specifiques a BB
Nombre de mois ecoules depuis la date de la derniere notation
Fonctions de hasard specifiques a B
Nb de mois ecoules depuis la date de la derniere notation
Fonctions de hasard specifiques a NR
Nombre de mois ecoules depuis la date de la derniere notation

FIG. 2. Taux instantané de passer au temps t d'une classe j vers une classe k sachant que l'épisode de migration en cours n'a pas été achevé avant le temps t

L'examen visuel des courbes relatives aux différentes destinations possibles, $AAA/AA, A, BBB, BB$ et B montre que, respectivement, durant les $77, 36, 23, 15$ et 10 premiers mois de chaque épisode, les fonctions de hasard sont croissantes et concaves, mais deviennent décroissantes et convexes au-delà. Ceci sous-entend que, pour l'ensemble de ces classes, le taux de hasard croît durant la première phase avec une vitesse moins rapide que celle qui caractérise son abaissement durant la deuxième phase. Nous pouvons aussi constater que les périodes durant lesquelles les taux de hasard montrent une dépendance

positive à l'égard de la durée sont de plus en plus importantes au fur et à mesure que l'on s'oriente vers des classes à risque faible.

Pour la classe NR, Les fonctions de hasard se montrent concaves et monotone croissantes, ce qui sous-entend qu'il existe une dépendance positive du taux de défaut avec la durée (autrement dit, la probabilité de défaut est d'autant plus élevée que la durée écoulée de l'épisode en cours est longue). Dans la figure (2), la position de la fonction de hasard estimée varie, pour chaque destination, selon la proximité entre celle-ci et la classe de risque de départ, les courbes associées aux classes de risque les plus proches étant les plus élevées et celles pour les classes de risque les plus éloignées, les plus basses. Cette constatation rejoint les résultats qui se dégagent de la littérature, et qui montrent que les transitions les plus fréquentes dans le contexte de notation financière sont celles qui se produisent entre des classes de risque voisines.

La simple lecture du graphique retenu pour la destination NR suffit à montrer la non-neutralité des autres classes de risque dans la probabilité de défaut. Plus la classe de risque de départ est meilleure, plus le risque de défaut est faible. Ce résultat s'accorde pleinement avec le constat que ne venons d'établir dans la section précédente sur l'existence éventuelle d'un problème de biais de sélection une fois sont écartés de l'échantillon tous les épisodes qui s'achèvent avec une marque NR.

L'interdépendance des épisodes de notation survenant chez une même firme peut être étudiée en faisant la lecture des valeurs estimées des paramètres relatifs à la structure autorégressive retenue en (28) pour modéliser les espérances conditionnelles des durées latentes. Ces dernières sont contenues dans les lignes $8, 9$ et 10 du tableau 4. Ils indiquent en quoi les caractéristiques des épisodes de notations vécus précédemment peuvent favoriser telle ou telle transition.

Les coefficients significatifs et de signe négatif dixième ligne de ce tableau, révèlent que, à mesure que croît l'ordre de l'épisode, les taux de hasard spécifiques à n'importe quel temps fixe t augmentent. Cela signifie que les premiers épisodes sont les plus longs parmi les épisodes observés et que la durée d'un épisode est d'autant plus courte que son ordre est élevé.

Les coefficients fournis dans la ligne 9 du tableau 4 étant eux aussi tous de signe négatif et presque tous significatifs[6] mettent en avant une dépendance positive des taux de hasard spécifiques à l'égard de la durée observée de l'épisode précédent. Une telle dépendance signifie que plus la durée d'un épisode de notation donné est longue, plus faible est l'espérance conditionnelle de la durée de l'épisode suivant.

Dans l'absolu, la récurrence de notation et la dépendance positive des taux de hasard spécifiques à l'égard des durées passées peuvent être vues comme un processus d'apprentissage ou encore de capitalisation des connaissances. Auquel cas, l'agence de notation S&P apprend progressivement au fur et à mesure des épisodes à réduire les délais de notation, en accumulant de l'information,

[6]Seul le coefficient relatif à la classe AAA/AA s'est révélé non significatif

en améliorant, par voie de conséquence, l'état de connaissance sur la réalité des firmes, et en engrangeant une sorte de savoir faire qui fait que le niveau d'expertise soit de plus en plus performant. L'arrivée des notations sera alors de plus en plus rapide.

Les valeurs enregistrées pour les coefficients

$$\beta_k; k = AAA/AA, A, BBB, BB...$$

(ligne 9 du tableau) attestent de la stationnarité des processus de durées associés respectivement aux variables latentes

$$D^f_{n,k}; k = AAA/AA, AA, \ldots, BBB, \ldots, B.$$

Cette condition qui stipule que la valeur absolue de chacun de ces coefficients doit être strictement inférieure à 1 est nécessaire pour la fiabilité des résultats de l'estimation du modèle par la méthode de maximum de vraisemblance. Notons, toutefois, que ces valeurs sont loin d'être proches de un pour montrer une certaine persistance dans les processus de durées, persistance que certains travaux ont mis en avant dans le cadre de l'application des modèles ACD à l'étude des processus de durées de transactions intra journalières sur certains marchés boursiers[7].

5.2. Les probabilités de transition.

Comme il a été indiqué précédemment, notre modèle présente l'avantage de fournir pour chaque type de transition une fonction de hasard spécifique dont les valeurs dépendent de la chronique des transitions antérieures (nombre, type et durées des épisodes de transitions passés). Cette caractéristique est intéressante en ce sens qu'elle nous donne les moyens de pouvoir apprécier la dynamique du processus de notation des firmes selon l'évolution des probabilités de transition au fil des épisodes. Cette évolution est retracée dans les figures (3, 4, 5) suivantes. Elle illustre pour chaque classe de risque la façon dont les valeurs des probabilités de transition vers les autres classes évoluent avec le rang de l'épisode considéré : il s'agit en fait d'une succession de coupes qui donnent chacune les valeurs estimées de la matrice de transition entre les classes de risque étant donné l'ordre de l'épisode de notation retenu. Pour une meilleure lisibilité des graphiques, nous avons regroupé, pour chaque classe de risque de départ, les types de transition ayant enregistrés une probabilité inférieure à 5% pour désigner une seule destination, appelée " Autres Destinations ".

On y retrouve le résultat classique qui stipule que les transitions les plus probables sont celles qui se caractérisent par une certaine stabilité de la note ou celles qui acheminent vers les classes voisines. Comme attendu, l'estimation des matrices de transitions a donné lieu à un nombre important de valeurs relativement très faibles pour indiquer les transitions (ou les évènements) rares. Les

[7]On peut citer ici, à titre d'exemples, les travaux de Bauwens et Giot (2000, 2003), Dufour et Engle (2000), Feng, Jiang et Song (2004).

éléments les plus significatifs sont essentiellement situés autour de la première diagonale. Cette caractéristique montre qu'en général, l'étendue de l'amélioration ou de détérioration de la note, si elles se produisent, à l'issue d'un épisode de notation, est au plus d'un à deux échelons.

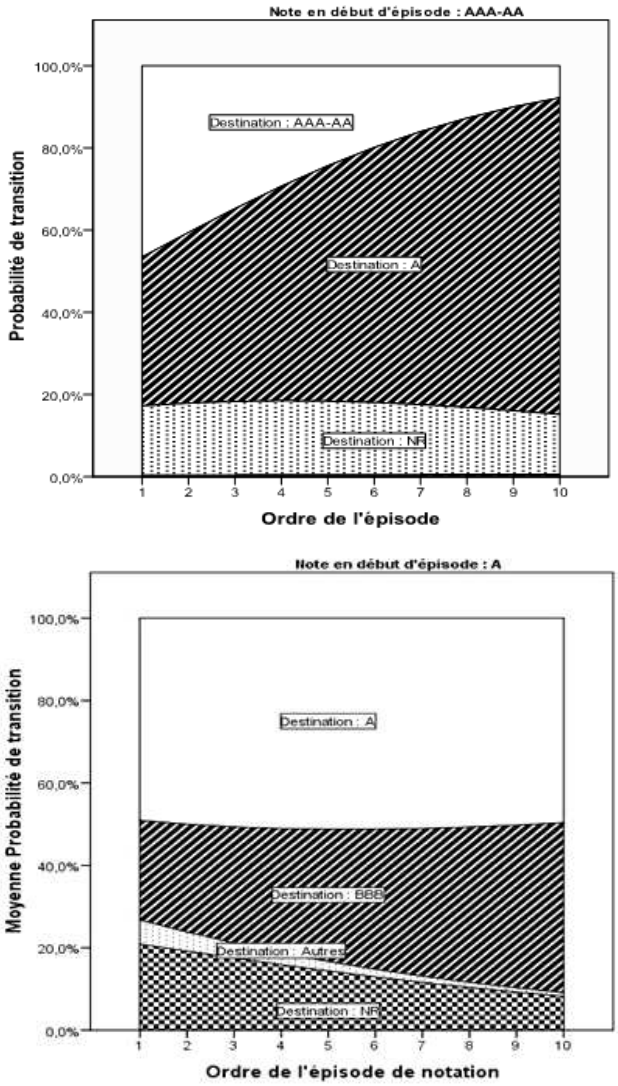


FIG. 3. Probabilités de transition des notes d'une classe j vers une classe k, selon l'ordre de l'épisode de migration (1)

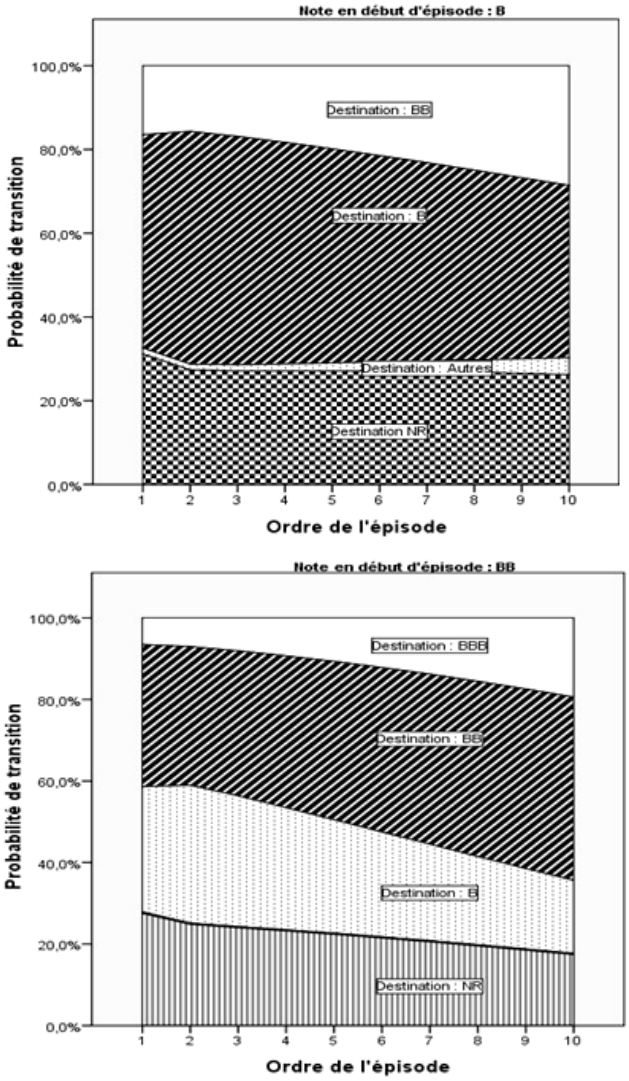


FIG. 4. Probabilités de transition des notes d'une classe j vers une classe k, selon l'ordre de l'épisode de migration (2)

Pour les firmes des classes de la catégorie d'investissement, on peut constater que le risque de voir sa note se détériorer à l'issue d'un épisode de notation est d'autant plus important que l'ordre de ce dernier est élevé. Cette tendance est plus accentuée pour les firmes de la première classe puisque la probabilité de détérioration de la note a tendance à avoisiner la valeur de $0,70$ après dix épisodes de notation contre une valeur de l'ordre de $0,37$ à l'issue du premier épisode. Pour les firmes de la classe A, cette probabilité n'est que de $0,38$ durant le dixième épisode, avec une première valeur de l'ordre de 25% à l'issue du premier épisode de notation.

De l'autre côté, parmi les classes de la catégorie dite de spéculation, seule la classe B qui semblent montrer une amélioration plus ou moins soutenue des

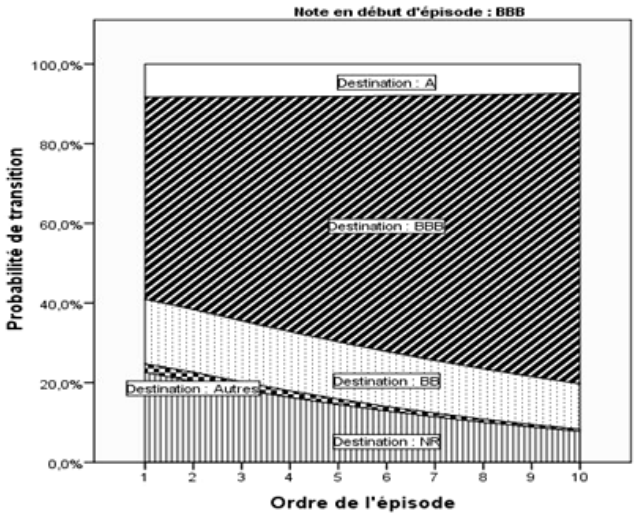


FIG. 5. Probabilités de transition des notes d'une classe j vers une classe k, selon l'ordre de l'épisode de migration (3)

notes au fil des épisodes – la probabilité de se voir améliorer sa note est passée pour cette classe de $0,07$ à l'issue du premier épisode à $0,28$ à la fin du dixième épisode-. Pour les classes BBB *et* B, comme d'ailleurs le cas pour la classe A, c'est le caractère dominant des éléments de la diagonale qui semble prévaloir d'un épisode à l'autre.

Enfin, on peut remarquer que les situations de No Rating semblent marquer davantage les premiers épisodes de notation, à des proportions différentes selon la classe de risque, que les derniers épisodes. Cette dernière constatation traduit à notre sens une meilleure maîtrise du processus d'évaluation de chaque firme au fil des épisodes.

6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un modèle ACD multi-états servant à prédire les transitions des notes de crédit qui sont accordées par l'agence de notation S&P. Outre les probabilités et les matrices de transition, l'accent est mis ici sur l'estimation, en temps continu, des fonctions de hasard spécifiques et des durées des épisodes de notation selon le type de transition considéré. Les estimations ont porté sur un échantillon qui retrace le parcours de notation de 668 firmes de la région Europe Asie Afrique par l'agence S&P sur une période de vingt ans, allant du premier Août 1989 au 21 février 2008.

Sur le plan méthodologique, notre travail se présente comme une première tentative à travers laquelle la logique des modèles ACD est retenue pour étudier le processus de notation des firmes. Tout particulièrement, en s'appuyant sur les structures autorégressives de ces modèles, nous avons eu les moyens de tenir compte des effets de la récurrence et de l'ordre de la note sur les probabilités de transition. C'était l'occasion aussi d'étendre le champ des ces modèles dans une optique associant la logique des modèles de durées à risques concurrents. Chaque transition est supposée être réalisée à l'issue d'un épisode de notation selon un schéma qui est décrit par le comportement d'un ensemble de variables de durées latentes associées aux différentes classes de risque selon les situations de départ et d'arrivée.

Sur le plan statistique, l'estimation des paramètres des fonctions de hasard spécifiques à ces durées par la méthode du maximum de vraisemblance montre la pertinence du choix de distributions de type Burr pour spécifier les processus régissant ces dernières. Toutes les fonctions de hasard ont montré une relation croissante et concave avec la durée des épisodes de notation. D'un autre côté, elles ont tendance à enregistrer des valeurs plus importantes au fil des épisodes.

Ces fonctions ont montré aussi la non-neutralité des autres classes de risque dans la probabilité de défaut. Plus la classe de risque de départ est meilleure, plus le risque de No Rating est faible. Ce résultat rejoint pleinement l'idée de l'existence d'un éventuel problème de biais de sélection une fois sont écartés de l'échantillon tous les épisodes qui s'achèvent avec une marque NR. Le recours à ces fonctions de hasard nous a donné la possibilité aussi de calculer des probabilités de transition relatives à des situations rares, tels que les passages de AAA vers B, de B vers AA ou autres.

Comme dernier point, nous pouvons évoquer aussi le caractère dominant qui, d'ailleurs, a tendance à se renforcer au fil des épisodes, des probabilités situées le long de la diagonale dans les matrices de transition estimées.

7. Annexe

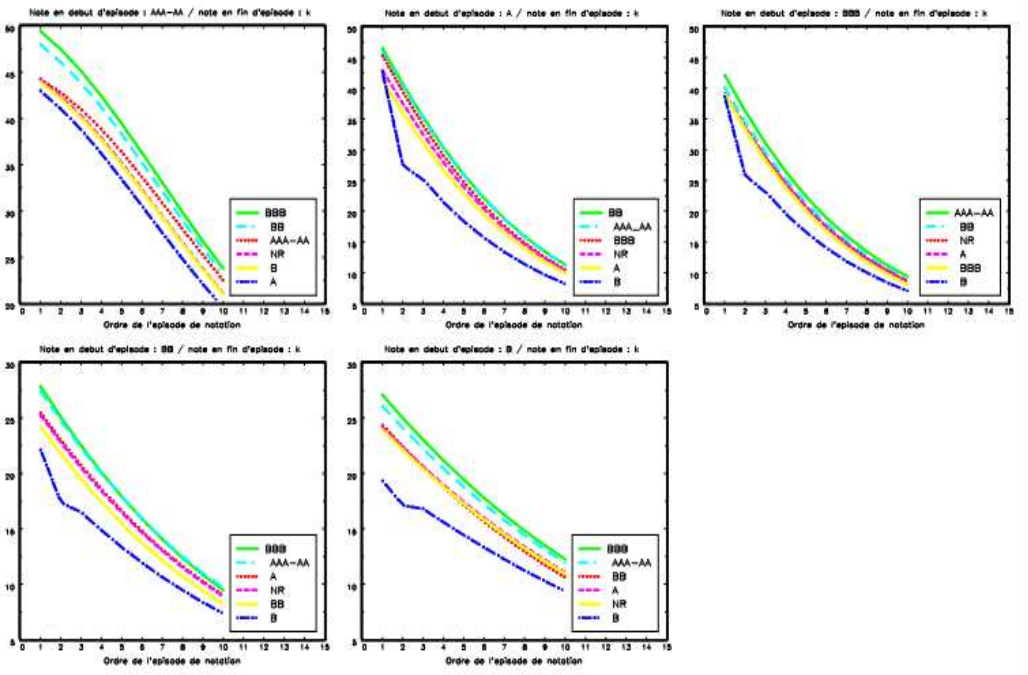


FIG. 6. Durée moyenne estimée d'un épisode de migration des notes d'une classe j vers une classe k, selon l'ordre de ce dernier

CHAPITRE 4

L'impact de la crise sur le parcours de notation des firmes

1. Introduction

L'évolution (dite encore "migration") des notes attribuées notamment par les trois grandes agences de notation joue un rôle très important au sein de la sphère financière, notamment dans la détermination des spreads de crédit qui conditionnent l'émission des obligations. La crise financière n'a pas fondamentalement changé la donne. La notation financière continue de jouer un rôle primordial dans la détermination des crédits accordés tant au monde de l'entreprise qu'à celui des pays souverains. Son rôle est toujours d'analyser la situation économique et financière de l'entité en question voire d'anticiper ses perspectives futures de développement et de rendement.

Les réactions suite à un déclassement (« bad news ») aussi bien que suite au surclassement (« good news ») montrent toute l'attention portée par les acteurs financiers aux annonces des agences de notation. Il est important de souligner qu'un changement de note, en particulier une dégradation, peut avoir des conséquences graves sur la cotation sur les marchés et sur le coût de financement de l'entité. En effet, l'abaissement de la note d'une entreprise touche directement le marché obligataire ainsi que le marché des actions. Par suite, les analystes revoient leurs anticipations de bénéfices à la baisse tant pour la société que pour les investisseurs en ces actions.

La question qui se pose actuellement est celle de l'impact de la crise sur le processus de notation des firmes. La crise financière de 2007/2008 n'a pas épargné d'importants groupes d'entreprises. Elle frapperait plus durement certains secteurs tels que la construction, l'automobile, le tourisme, la finance, les services et l'immobilier et plus particulièrement certaines zones géographiques. En effet, selon l'AMF, les agences de notation ont brutalement abaissé leur note pendant et après la crise à raison de 155 abaissements en 2008 contre 56 abaissements en 2007.

Les abaissements ayant doublé en 2008, de nombreuses critiques ont été émises vis à vis des agences de notation, plus particulièrement de la part des investisseurs concernés par la performance réelle des actifs financiers qui avaient les meilleures notations. De nombreux titres notés AAA-AA ont ainsi connu de fortes baisses à cause de la méthodologie adoptée par certaines agences. D'autres critiques visent essentiellement la relation entre les agences de notation et les émetteurs. En effet, l'agence étant rémunérée par l'entreprise

émettrice dans la majorité des cas, les notes attribuées ont tendance à être surévaluées car ces agences se retrouvent en situation de relative dépendance par rapport à leurs clients.

Donc, nous pouvons être tentés de remettre en question la qualité d'expertise des agences en matière d'évaluation du risque de crédit. Notons cependant qu'à l'heure actuelle, aucune alternative n'a été mise en place, en dépit de certaines annonces sans doute prématuéres. Tenues de réviser leurs notes et leurs méthodologies, les agences doivent mieux tenir compte des risques tels ceux de la liquidité, de contrepartie et des phénomènes de contagion. En effet, leur notation ne porte que sur le risque de défaillance, mais celui-ci est lié aux risques précédents qui se sont avérés importants lors des dysfonctionnements des marchés pendant la crise.

L'objectif de ce chapitre est d'analyser le processus de transition de la note et d'estimer les propriétés fondamentales de son processus de migration afin de mesurer l'effet de la crise sur ce processus de notation. Nous nous intéressons dans ce travail à modéliser les parcours de notation des firmes ainsi que la durée entre les variations des notes dans ce nouveau contexte. L'importance de cette étude est de mettre au point une nomenclature d'états exclusifs à partir de laquelle on peut identifier et décrire entièrement la trajectoire des notations pour l'ensemble des firmes de notre échantillon.

La méthodologie utilisée à ce sujet est le modèle ACD *Autoregressive conditional Duration* où la moyenne conditionnelle de la durée entre deux notes est modélisée comme un processus latent afin de permettre aux variables non observables d'influencer la durée entre les notes .Un modèle probit ordonné est aussi mis en point afin de décrire les directions prises par les notes en présence des états multiples de la note, et ceux avant et après la crise. Les paramètres du modèle sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance.

Le chapitre est organisé comme suit : La section 2 rappelle certains travaux sur le changement de notation en tenant compte d'un facteur d'hétérogénéité. Les sections 3 et 4 examinent un échantillon de données empiriques, illustrant notre problématique et la mise en œuvre de notre méthodologie. La section 5 enfin met en évidence l'effet d'un facteur inobservable sur le processus de notation des firmes.

2. Revue de la littérature

Les modèles de migration des notations de firmes ont fait l'objet de nombreux travaux récents qui évaluent les changements de notation depuis les récentes crises financières. Si quelques auteurs mettent en œuvre des modèles théoriques de migration en se basant sur les processus de Markov, rares sont les études qui évaluent l'impact des crises sur les changements de parcours de notation des firmes. Nous utilisons ici un modèle probit ordonné pour les différents parcours de notation des firmes afin d'évaluer les impacts de crise sur les migrations de notation.

L'étude des changements de note a été déjà mis en œuvre dans de nombreuses études telles que Feng et Gourieroux[1], Gagliardini et Gourieroux (2005a, 2005b). En utilisant une modélisation de la structure par terme des primes, Bangia *et al.* (2002) évaluent les risques inhérents aux portefeuilles et les prix des dérivés de crédit à l'aide de modèle de migration des notations. En séparant l'économie en deux états ou deux régimes, expansion et contraction, ils montrent que la distribution des pertes de portefeuille de crédit peut varier considérablement, tout comme le niveau de capital économique à affecter par l'établissement financier. Ils se basent sur le facteur de volatilité macroéconomique comme un élément clé d'un cadre conceptuel utile pour tester les portefeuilles de crédit (stress) et sur les matrices de migration de crédit entre les conditions macroéconomiques et la qualité des actifs pour caractériser les changements attendus de la qualité de crédit. Leurs modèles ont des applications différentes telles que la structure par terme des primes de risques de crédit et le prix des produits dérivés.

D'autres modèles comme ceux de Frydman et Schuermann (2007) proposent un modèle de Markov mixte pour étudier les liens entre les matrices de transition et le risque de crédit. Ils estiment le modèle en utilisant l'historique de notation de crédit et montrent que le modèle mixte est meilleur que le modèle de Markov simple. ils montrent également que la note future de l'entreprise dépend de sa note actuelle et de son historique de notation. En effet, ils constatent que deux entreprises ayant les mêmes notes peuvent avoir sensiblement différents vecteurs de probabilités de transition. Ils comparent les performances du modèle mixte et de la chaîne de Markov. Nickell *et al.* (2000) étudient la dépendance de la probabilité de transition des notes avec le cycle économique. Ils emploient des modèles probit ordonnés. Cette approche donne une idée plus précise sur l'importance des facteurs en comparant les matrices de transition estimées à partir de différents échantillons.

A la lumière de ces études, deux approches pour l'estimation des probabilités de changement de notation sont mis en œuvre. La première est une simple approche non paramétrique qui consiste simplement à estimer les probabilités en fonction des fréquences par rapport aux ensembles de données distinctes

[1]Les changements de note de crédit sont anticipés en se basant sur les matrices de transition qui décrivent ainsi l'évolution de la qualité de la dette des entreprises.

correspondant à différents types de débiteurs ou observées à différents stades du cycle économique. La deuxième approche utilise un modèle paramétrique de type probit ordonné. Ceci a l'avantage de pouvoir estimer l'impact sur les probabilités de changement de notation de la modification d'une seule caractéristique d'un débiteur, compte tenu d'autres caractéristiques et d'un certain stade fixé du cycle économique. A partir de notre base de données, nous mettons en œuvre un modèle de transition des notations et évaluont l'impact de ces transitions à la lumière des crises actuelles.

3. Modèle

Ce que nous cherchons à modéliser est un processus joint décrivant les parcours de notation des firmes en fonction des durées de notation (nombre de mois qui séparent les dates de deux changements de notes successifs) et les directions empruntées par les notes à l'issu des changements annoncés par l'agence S&P.

Pour progresser, nous écrivons, pour chaque épisode de notation n ($n = 1, 2, \ldots, N^f - 1$) d'une firme donnée f ($f = 1, 2 \ldots, F$), la distribution jointe du couple $y_n^f = (x_{\tau_n}^f, d_n^f)$ de la manière suivante :

$$f_Y(x_n^f, d_n^f / z_{1n}^f, z_{2n}^f, v, I_{n-1}^f; \theta) = f_X(x_n^f / d_n^f, z_{1n}^f, v; \theta)\ f_D(d_n^f / z_{2n}^f, v, I_{n-1}^f; \theta) \quad (41)$$

où :

(1) $f_X(x_n^f / d_n^f, z_{1n}^f, v; \theta)$ désigne la densité de probabilité des différentes directions que peut emprunter la note à l'issue du n-ième épisode de notation. Celles-ci sont modélisées par une variable polytomique dont les modalités sont ordonnées de la manière suivante [2] :

$$x_n^f \begin{cases} 1 \mapsto \textit{Abaissement majeur de la note} \\ 2 \mapsto \textit{Abaissement mineur de la note} \\ 3 \mapsto \textit{Augmentation mineure de la note} \\ 4 \mapsto \textit{Augmentation majeure de la note} \end{cases}$$

Cette fonction est établie conditionnellement à un ensemble de caractéristiques observables, z_{1n}^f, et non observables v, ainsi qu'à la durée de l'épisode de notation donnant lieu au n'ième changement annoncé pour la firme f, d_n^f.

(2) La fonction $f_D(d_n^f / z_{2n}^f, v, I_{n-1}^f; \theta)$ correspond à la fonction de densité de la durée conditionnellement à I_{n-1}^f (toute l'information qui est jusque là disponible sur la dynamique décrivant le passé du parcours de notation de la firme f). Là encore, cette fonction est exprimée en

[2]Nous entendons par abaissement majeur, le passage d'une note d'une classe donnée à une autre classe. A titre d'exemple, une transition de la catégorie AA à la catégorie A, selon l'échelle de note de Standard and Poor's. Un abaissement mineur se traduit par par le passage des notes affublées d'un "+" vers des notes affublées d'un "-" , à titre d'exemple le passage de AAA^+ à AAA^-.

fonction d'un ensemble de caractéristiques observables, z_{2n}^f, et non observables v.

(3) Le terme θ est le vecteur de paramètres à estimer.

3.1. Un modèle Probit ordonné pour la direction des notes.

Le recours à un modèle Probit ordonné afin de modéliser la direction des notes est fondé sur l'idée que la classe de risque à laquelle est affectée une firme f à un moment donné est déterminée à partir de l'évaluation d'un score continu non observable. Dans notre cas, ce score est considéré comme étant une fonction décroissante de la probabilité de défaut estimée. Soit S_n^f, la valeur du score enregistrée par une firme f à l'issu du nième épisode de notation.

Ce que nous retenons, ce sont les variations de ce score au fil du temps.

Ainsi, nous notons :

$$y_n^f \begin{cases} 1 \; si \bigtriangleup S_n^f < c_1 \mapsto Abaissement\ majeur\ de\ la\ note \\ 2 \; si \; c_1 \leq \bigtriangleup S_n^f < c_2 \mapsto Abaissement\ mineur\ de\ la\ note \\ 3 \; si \; c_2 \leq \bigtriangleup S_n^f < c_3 \mapsto Augmentation\ mineure\ de\ la\ note \\ 4 \; si \; \bigtriangleup S_n^f \geq c_3 \mapsto Augmentation\ majeure\ de\ la\ note \end{cases}$$

avec :

$$\bigtriangleup S_n^f = S_n^f - S_{n-1}^f = \beta_0 + x_n^{f\prime}\beta + \beta_v v + \varepsilon \tag{42}$$

Dans cette formulation (42), $\bigtriangleup S_n^f$ indique la différence entre les scores de fin et de début du $n^{ème}$ épisode de notation de la firme f. Cette différence est exprimée en fonction d'un ensemble de variables explicatives observables $x_n^{f\prime}$,(indiquant la durée et l'ordre de l'épisode en cours, d'une part, et les périodes avant et après la crise, d'autre part), un facteur d'hétérogénéité non observable v et un terme d'erreur ε qui est distribué selon une loi normale de moyenne zéro et de variance σ^2.

Suite à cette écriture, trois seuils sont retenus afin de faire ressortir quatre scénarios qui déterminent le sens et l'ampleur de variation de la note (abaissement majeur de la note, abaissement mineur de la note, élévation mineure de la note, élévation majeure de la note).

Notre optique, consiste donc à estimer le vecteur de paramètres :

$$(c_1, c_2, c_3, \beta, \beta_v, \sigma)$$

où c_i représente les seuils à estimer en utilisant la méthode de maximum de vraisemblance tenant compte des paramètres β.

Les probabilités associées aux quatre modalités sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\Pr(y_n^f &= 1/d_n^f, I_{n-1}^f, v) = \Pr(\triangle S_n^f < c_1) &(43)\\ &= \Pr(\varepsilon < c_1 - \beta_0 - x_n^{f\prime}\beta - \beta_v v) &(44)\\ &= \Phi\left(\frac{c_1 - \beta_0 - x_n^{f\prime}\beta - \beta_v v)}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(y_n^f &= 2/d_n^f, I_{n-1}^f, v) = \Pr(c_1 \leq \triangle S_n^f < c_2) &(45)\\ &= \Pr(c_1 - \beta_0 - x_n^{f\prime}\beta - \beta_v v) < \varepsilon < c_2 - \beta_0 - x_n^{f\prime}\beta - \beta_v v)\\ &= \Phi\left(\frac{c_2 - \beta_0 - x_n^{f\prime}\beta - \beta_v v)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c_1 - \beta_0 - x_n^{f\prime}\beta - \beta_v v)}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(y_n^f &= 3/d_n^f, I_{n-1}^f, v) = \Pr(c_2 \leq \triangle S_n^f < c_3) &(46)\\ &= \Pr(c_2 - \beta_0 - x_n^{f\prime}\beta - \beta_v v) < \varepsilon < c_3 - \beta_0 - x_n^{f\prime}\beta - \beta_v v)\\ &= \Phi\left(\frac{c_3 - \beta_0 - x_n^{f\prime}\beta - \beta_v v)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c_2 - \beta_0 - x_n^{f\prime}\beta - \beta_v v)}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(y_n^f &= 4/d_n^f, I_{n-1}^f, v) = \Pr(\triangle S_n^f \geq c_3) &(47)\\ &= \Pr(\varepsilon \geq c_3 - \beta_0 - x_n^{f\prime}\beta - \beta_v v) &(48)\\ &= 1 - \Phi\left(\frac{c_3 - \beta_0 - x_n^{f\prime}\beta - \beta_v v)}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

Pour des raisons d'identification, la variance du terme d'erreur ε est normalisée à un (i.e. $\sigma = 1$).

3.2. Un modèle LOG-ACD pour la durée des épisodes de notation.

Pour modéliser les durées des épisodes de notation, nous faisons appel à un modèle LOG-ACD. Comme indiqué dans le chapitre précédent ce type de modèle présente l'avantage de tenir compte de la dépendance temporelle entre les durées de notation d'une même firme. Cette dépendance temporelle est exprimée par une structure autorégressive que nous retenons pour modéliser les espérances conditionnelles des durées.

Ainsi, supposons que chaque réalisation d_n^f, peut se présenter comme le produit de deux composantes indépendantes :

- Une première composante déterministe $\Psi^f_{n\,/I_{n-1}^f}\ \alpha\ \ln\left[E\left(D_n^f/I_{n-1}^f\right)\right]$ qui est proportionnelle au logarithme de l'espérance conditionnelle de la durée de l'épisode n.
- Une deuxième composante aléatoire dont les termes ε_n, sont identiquement et indépendamment distribués, I_{n-1}^f étant toute l'information disponible sur la firme f à la date τ_{n-1}^f.

Sur le plan formel, le processus de durée de notation est exprimé pour chaque firme f de la manière suivante :

$$d_n^f = \exp(\Psi^f_{n\ /I^f_{n-1}})\varepsilon_n \tag{49}$$

pour $n = 2, \ldots, N^f - 1$

$$\Psi^f_{n\ /I^f_{n-1}} = \alpha\prime z_n^f + \alpha_v v \tag{50}$$

$$\begin{aligned} avec\ E\left(D_n^f/I_{n-1}^f\right) &= \mu \exp(\Psi^f_{n\ /I^f_{n-1}}) \\ E\left(\varepsilon_n/I_{n-1}^f\right) &= \mu \\ var\left(\varepsilon_n/I_{n-1}^f\right) &= 1 \end{aligned} \tag{51}$$

Pour compléter l'écriture de la fonction de vraisemblance, nous supposons que, conditionnellement à I^f_{n-1}, les termes ε_n sont distribués selon une loi de Weibull avec la fonction de densité suivante :

$$f_k(\varepsilon_n) = \gamma\mu^\gamma \exp(-\gamma\mu^\gamma\varepsilon_n^\gamma) \tag{52}$$

avec $\gamma > 0$ et une moyenne : $\mu = \Gamma(1 + \frac{1}{\gamma})$.

En procédant à un simple changement de variables, on peut voir que, conditionnellement à I^f_{n-1}, la distribution de D^f_n est aussi donnée par une loi de Weibull de paramètres donnés par :

$$\left(\left[\frac{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})}{\Psi^f_{n\ /I^f_{n-1}}} \right]^{\gamma_k}, \gamma \right).$$

Dans le cas d'une distribution de Weibull, la fonction de hasard conditionnelle est monotone. Elle est strictement croissante en fonction de la durée $\gamma_k > 1$, strictement décroissante pour $\gamma_k < 1$, et reste constante pour $\gamma_k = 1$. Dans ce dernier cas, la loi de Weibull est réduite à une loi exponentielle de paramètre $(\Psi^f_{n\ /I^f_{n-1}})^{-1}$.

3.3. La fonction de vraisemblance.

Comme nous pouvons le constater, nous avons exprimé $f_X(.)$ et $f_D(.)$ en fonction d'un terme aléatoire non observable v afin de tenir compte de l'hétérogénéité des observations dans leurs dimensions individuelles. En effet, il correspond à des facteurs d'hétérogénéité inter-temporelles non observables susceptibles d'influencer le processus de notation.

Sur le plan statistique, nous supposons, à l'instar de Green (1990), que ν est distribué selon une loi de probabilité discrète qui est définie sur un ensemble de m points de masse, notée $v_1, v_2; \ldots, v_m$ avec les poids respectifs $p_1, p_2, \ldots, p_m (\sum_{k=1}^{m} p_k = 1)$.

Dans ces conditions, la fonction de vraisemblance pour l'ensemble des firmes de notre échantillon s'établit comme suit :

$$L(\theta) = \prod_{f=1}^{F} \prod_{n=1}^{N_{f-1}} \sum_{k=1}^{m} p_k \left[f_X \left(x_n^f / d_n^f, x_n^f, v_k; \theta \right) f_D \left(d_n^f / z_n^f, v_k, I_{n-1}^f; \theta \right) \right] \tag{53}$$

Le nombre de points de masses à retenir pour ν est déterminé par une méthode de balayage qui consiste à maximiser par rapport à θ la valeur de la fonction de vraisemblance, fonction que nous retenons pour estimer tous les paramètres du modèle.

A l'issu de l'estimation des paramètres du modèle, les valeurs prises par le terme aléatoire ν vont être à l'origine de la création d'un ensemble de classes permettant une typologie des épisodes de notation. L'affectation aux différentes classes est réalisée moyennant les probabilités à postériori d'appartenir une classes donnée :

$$\begin{aligned} j(j = 1, 2, \ldots, m) : \pi_n^f(j) = \Pr(classe\ j / d_n^f, x_n^f, z_n^f, I_{n-1}^f; \theta) = \\ \frac{p_j \left[f_X \left(x_n^f / d_n^f, z_{1n}^f, v_j; \theta \right) f_D \left(d_n^f / z_{2n}^f, v_j, I_{n-1}^f; \theta \right) \right]}{\sum_{k=1}^{m} p_k \left[f_X \left(x_n^f / d_n^f, z_{1n}^f, v_k; \theta \right) f_D \left(d_n^f / z_{2n}^f, v_k, I_{n-1}^f; \theta \right) \right]} \end{aligned} \tag{54}$$

Cette expression montre que la probabilité conditionnelle à posteriori d'appartenance aux différentes classes dépend à la fois de tous les paramètres du modèle et de tous les variables caractérisant le processus joint des durées et directions de notion des firmes. Cette constatation nous donne le droit de considérer notre modèle comme étant un modèle à classes latentes, puisque le processus d'appartenance au groupe est régi par un processus aléatoire endogène non observable.

4. Données

L'échantillon retenu dans cette section concerne le parcours de notation de 5579 firmes notées par l'agence S&P durant la période 1989-2009. Ces firmes se répartissent en trois zones géographiques de la manière suivante : 518 firmes de la region Asie, 900 de la zone Europe, 4161 de la zone USA.[3]

Durant la période d'observation, les entreprises sont affectées à l'occasion de chaque changement de notation à l'une des 11 classes suivantes :

$$AAA - AA - A - BBB - BB - B - CCC - CC - C - SD - D.$$

[3]On a regroupé les firmes appartenant aux secteurs Asie, Europe à cause de la faiblesse de l'échantillon par rapport à la zone USA.

De la même manière que le chapitre précédent, ce processus d'observation des firmes, nous a servi comme base pour constituer un échantillon de 18262 épisodes de notation qui se répartissent comme suit : 1320 épisodes de notation pour les firmes de la région Asie , 2816 épisodes en Europe et 14125 épisodes en USA.

Etant donné le nombre élevé des classes de risques, ces dernières ont été agrégées de manière à faire ressortir quatre directions possibles que peut emprunter la note à l'issu de chaque épisode de notation :

$$\begin{cases} \text{"Baisse majeure"} \\ \text{"Baisse mineure"} \\ \text{"Augmentation majeure"} \\ \text{"Augmentation mineure".} \end{cases},$$

Conformément à l'objectif de ce chapitre, une attention toute particulière est accordée à l'effet de la crise sur le processus de notation des firmes. Le grahique 1 ci-dessous donne la répartition de l'échantillon selon l'issu des différents épisodes et ce avant et après la crise. Ce graphique montre que la part des épisodes qui ont été sanctionnés par un abaissement de la note à augmenter de manière significative durant la période après la crise. En effet, ce graphique révèle qu'avant la crise, 34.41% des épisodes de notation ont conduit à une baisse majeure contre 54.86% après la crise. Parallélement, les situations d'augmentation de la note ont enregistré une baisse importante durant les périodes après la crise : on note 18.37% avant la crise contre 4.37% après la crise.

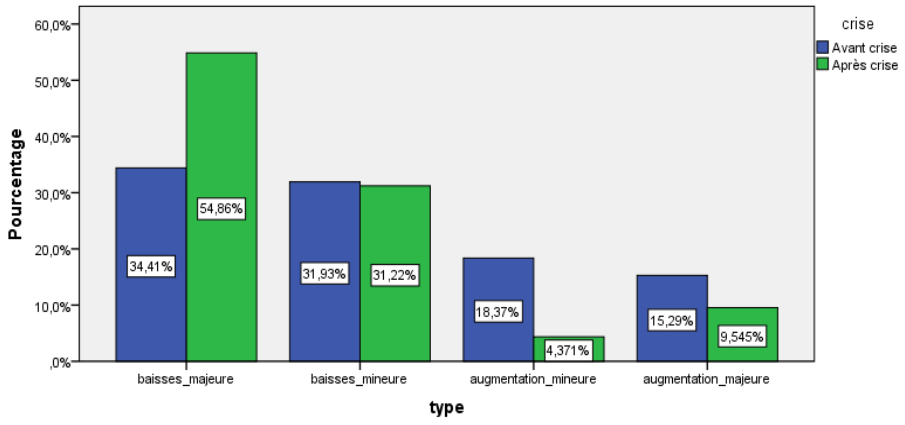


FIG. 1. Evolution des notes avant et après la crise

Ces résultats montrent que la crise des subprimes a déclenché une cascade d'abaissement des notes révélant la fragilité financière des entreprises et en particulier leur niveau de solvabilité. Cette instabilité a conduit les agences

de notation à descendre les notes des entreprises de façon parfois très brutale, amplifiant les effets de la crise.

Dans le même ordre d'idée, un graphique est retenu pour faire ressortir l'évolution de la durée moyenne des épisodes de notation entre les périodes avant et après la crise. Là encore, la crise semble influencer le processus de notation à travers les durées des épisodes . La figure 2 montre que la durée moyenne d'un épisode de notation est de 5 mois, sachant que la durée moyenne avant la crise était de 22 mois. En effet, que quelque soit le type d'événement après la crise, on a une accélération des changements de note..

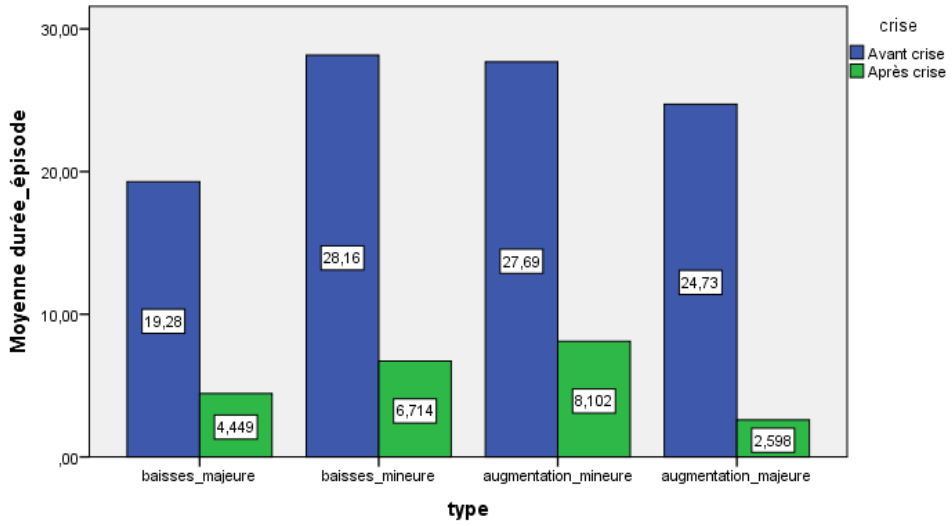


FIG. 2. Durée moyenne des épisodes de notation avant et après la crise

Pour compléter l'analyse, nous avons retenu le test de student afin de comparer la duréee moyenne des épisodes de notation (voir tableau 1). A ce niveau les résultats du test sont sans ambiguïté. Le niveau de significativité de la statestique du test ne peut que conforter l'hypothèse de différence de moyenne de la durée des épisodes de notation. Cette dernière était de l'ordre de 24 mois, elle est passée à 5 mois après la crise. En effet, avant la crise, les notations de la plupart des entreprises changeaient peu. Cependant de nombreux indices indiquaient qu'elles étaient sensibles à l'évolution du cycle économique. Les agences de notation surveillaient en permanence la situation des entreprises. Elles ne réagissaient pas aux modifications mineures de leurs profils de risque. Toutefois, après la crise, les agences de notation sont devenues plus attentives aux moindres changements pouvant affecter la situation financière d'une firme. Elles ont donc eu tendance à revoir très vite la note dès qu'il y avait un événement particulier à survenir.

TAB. 1. Test de Student pour la variable de durée

	N	Moyenne	écart type	Erreur standard
Durée de l'épisode avant la crise	11468	24.4962	24.61944	.22990
Durée de l'épisode après la crise	1121	5.1392	5.0536	.15094

H_0:égalité des moyennes ; H_1:moyennes différentes

Statestique du test de Student : 136.33

Degré de liberté : 1 ;Niveau de significativité < 0.01

On accepte H_1

5. Résultats et interprétations du modèle

Dans cette section, nous revenons sur l'estimation du modèle global moyennant la méthode du maximum de vraisemblance (cf : expression 53). La contribution de chaque firme à l'écriture de cette fonction traduit son parcour de notation. C'est dans ce cadre que le modèle probit ordonné est combiné avec le modèle ACD, pour rendre compte respectivement de la direction de la note et de la durée entre les épisodes de notation.

Pour le modèle probit ordonné quatre scénarios possibles sont retenus et sont classés du plus défavorable au plus favorable (i-e :"abaissement majeur", "augmentation majeure") en passant par les situations intermédiaires à savoir "abaissement mineur " et "augmentation mineure" :

$$x_n^f \begin{cases} 1 \mapsto \textit{Abaissement majeur de la note} \\ 2 \mapsto \textit{Abaissement mineur de la note} \\ 3 \mapsto \textit{Elévation mineure de la note} \\ 4 \mapsto \textit{Elévation majeure de la note} \end{cases}$$

Au plan formel, le modèle probit ordonné est défini par l'équation suivante :

$$\Delta S_n^f = \beta_0 + \beta_1 \log(d_n^f) + \beta_2 ordre + \beta_3 v + u,$$

avec $u \longrightarrow Normal\ (0, \sigma^2)$.

Le signe positif et le caractère significatif des coefficients β_1, β_2 et β_3 indiquent respectivement un effet positif des variables " durée de l'épisode de notation ", " ordre de l'épisode de notation " et les facteurs d'hétérogénéité non observables sur la probabilité d'occuper une meilleure position sur l'échelle de notation de S&P.

De son côté le modèle ACD est défini par l'équation suivante :

$$\Psi_n^f / I_{n-1}^f = w_0 + w_1 \log(d_{n-1}^f) + w_2 ordre + w_3 \Psi_{n-1}^f / I_{n-1}^f + v + \varepsilon_n \qquad (55)$$

$$\text{avec } \varepsilon_n \longrightarrow Weibull\ (\gamma)$$

$$\text{et } v_1, v_2 = 0, v_3 \textit{ et } v_4 \text{ avec les probabilités respectives}$$

$$((1 - (p_1 + p_2 + p_3)), p_2, p_3, p_4)$$

Les résultats de l'estimation des paramètres du modèle par la méthode du maximum de vraisemblance sont donnés dans le tableau 2. Les deuxième et troisième colonnes de ce tableau fournissent le résultat des estimations respectivement pour la zone Europe-Asie et la zone Amérique. Dans la quatrième colonne, on retrouve les résultats de l'estimation pour l'ensemble de l'échantillon. Bien que ces estimations soient conduites sur trois zones différentes, les résultats semblent fournir le même schéma d'interprétation et conférer par la même occasion au modèle une certaine validité.

La première partie du tableau 2 revient sur les résultats de l'estimation de la partie quantitative du modèle de durée. Globalement ces derniers rejoignent les résultats obtenus dans le chapitre précédent.

Pour documenter l'interdépendance des épisodes de notation survenant chez une même firme, nous examinons les paramètres w_1, w_2 et w_3. En effet, les derniers se révèlent tous comme significatifs et confortent par la même occasion la spécification autorégressive retenue dans l'expression 55. D'une manière plus précise, les signes négatifs des paramètres w_1, w_2 et w_3 montrent que la durée moyenne d'un épisode de notation donné est d'autant plus courte que la durée de l'épisode précédent et l'ordre de l'épisode courant sont respectivement plus importants.

Par ailleurs les valeurs enregistrées pour le paramètre de forme gamma (zone Europe Asie : γ_1 zone Amérique : γ_2) mettent en avant une dépendance positive de la fonction de hasard à l'égard de la durée et nous conduisent à dire que la fonction de hasard est strictement croissante donc le risque est strictement croissant.

Dans la deuxième partie du tableau sont exposés les paramètres relatifs à la partie qualitative du modèle (modèle probit ordonné). Ces résultats montrent que la récurrence de la notation et l'accroissement de la durée moyenne de l'épisode de notation et de l'ordre d'un épisode sont de nature à prédire une amélioration de la note.

Les coefficients c_1, c_2 et c_3 indiquent les valeurs du score (seuils) à partir desquels on passe d'une situation à une autre. Ces derniers sont respectivement de l'ordre de :

- -2 ,28 pour indiquer le passage d'une situation d'un "abaissement majeur" vers "abaissement mineur" ;
- -0,903 pour distinguer entre une "baisse mineure" et une "augmentation mineure" ;
- 0,7795 pour différencier les situations d'une "augmentation mineure" des situations d'une "augmentation majeure" ;

Le dernier coefficient β_0 se réfère à la constante de l'équation du score qui affiche un signe négatif pour les différents échantillons.

TAB. 2. Estimation des paramètres

Paramètres	Europe/Asie	USA	Global
Paramètres du modèle ACD			
w_0	$2.9140^{***}(0.0480)$	$3.0424^{***}(0.0241)$	$3.0056^{***}(0.0208)$
w_1	$-0.0604^{***}(0.0226)$	$-0.058^{***}(0.0171)$	$-0.0011(0.0109)$
w_2	$-0.7254^{***}(0.0411)$	$-0.6966^{***}(0.0269)$	$-0.7038^{***}(0.0217)$
w_3	$-0.1307^{***}(0.0354)$	$-0.1854^{***}(0.0404)$	$-0.1319^{***}(0.0134)$
γ	$1.6291^{***}(0.0696)$	$1.7555^{***}(0.0367)$	$1.7479^{***}(0.0305)$
Paramètres du modèle Probit			
c_1	$-2.2806^{***}(0.0571)$	$-2.1090^{***}(0.0234)$	$-2.1196^{***}(0.0213)$
c_2	$-0.9037^{***}(0.0293)$	$-0.8878^{***}(0.0139)$	$-0.8814^{***}(0.0123)$
c_3	$0.7795^{***}(0.0298)$	$0.5531^{***}(0.0129)$	$0.5958^{***}(0.0118)$
β_0	$-1.0485^{***}(0.0833)$	$-1.2110^{***}(0.0397)$	$-1.1449^{***}(0.0348)$
β_1	$0.0568^{***}(0.0304)$	$0.2178^{***}(0.0149)$	$0.1875^{***}(0.0131)$
β_2	$0.0897^{***}(0.0116)$	$0.0127^{***}(0.0051)$	$0.0221^{***}(0.0045)$
β_3	$0.2615^{***}(0.0364)$	$0.0986^{***}(0.0161)$	$0.1237^{***}(0.0141)$
Paramétres associés aux facteurs d'hétérogéniété			
v_1	$-1.5255^{***}(0.1064)$	$-1.6316^{***}(0.0508)$	$-1.6335^{***}(0.0446)$
p_1	$0.0810^{***}(0.0093)$	$0.0983^{***}(0.0057)$	$0.0925^{***}(0.0047)$
v_3	$0.9876^{***}(0.0618)$	$0.9183^{***}(0.0317)$	$0.9459^{***}(0.0262)$
p_3	$0.3644^{***}(0.0190)$	$0.3401^{***}(0.0095)$	$0.3490^{***}(0.0083)$
v_4	$3.2312^{***}(0.1534)$	$3.5634^{***}(0.0911)$	$3.5272^{***}(0.0725)$
p_4	$0.4622^{***}(0.0237)$	$0.3730^{***}(0.0085)$	$0.3821^{***}(0.0075)$
Log-vrai	-59844.8	-16282.19	-76252.45
Nb d'ob	4136	14125	18261

a- *** : valeur significative

b- Les termes entre () désignent les écarts types estimés

c- La valeur de v_2 a été retenu comme étant égale à 0 pour des raisons d'identification des paramêtres

d- p_2=1-(p_1+p_3+p_4)

La troisième partie du tableau est retenue pour les paramètres du processus générateur de l'hétérogénéité non observable dans l'échantillon. Dans notre cas, ce dernier est caractérisé par un support formé de quatre points de masse notés v_1, v_2, v_3 et v_4 dont les valeurs respectives sont de l'ordre de $-1.5255, 0$, 0.9876 et 3.2312. Selon l'expression 54, quatre classes d'observations seront ainsi établies, les valeurs enregistrées respectivement pour p_1 ,p_2, p_3 et p_4 vont servir comme valeurs des probabilités à priori d'appartenance aux groupes $1, 2, 3$ et 4 dont les caractéristiques sont données dans le tableau 3.

Comme indiqué précédemment (tableau 2), on a vu que, plus la valeur de v est faible, plus on a tendance à récupérer une baisse des notes avec une réduction de la durée. Cela montre qu'on est dans un contexte défavorable. En revanche lorsque v prend des valeurs élevées, cela montre une amélioration de la note avec des durées plus longues et dans ce cas on se retrouve dans

un contexte favorable. En effet, dans un contexte défavorable, les agences de notation sont amenées à réévaluer rapidement les notes.

Dans ce qui suit, les groupes issus de l'étape précédente sont ordonnés de la manière suivante pour donner lieu à une variable polytomique dont les modalités pour chaque notation :

$$\text{y : Contexte} \begin{cases} 1 : \text{Contexte défavorable} \\ 2 : \text{Contexte assez défavorable} \\ 3 : \text{Contexte assez favorable} \\ 4 : \text{Contexte favorable} \end{cases}$$

L'affectation aux groupes repose sur les probabilités à postériori mentionné dans l'expression 54. Ainsi quatre probabilités seront générées pour chaque épisode de notation, afin qu'ils soient affectés aux groupes j, avec qui il enregistre la probabilité la plus élevée $\pi_n^f(j)$.

Formellement, la régle d'affectation aux groupes se présentent comme suit :

$$si\ \pi_n^f(j) = \max\left\{\pi_n^f(1), \pi_n^f(2), \pi_n^f(3), \pi_n^f(4)\right\}$$

$$alors \text{ le } n^{ème}\text{épisode de la firme } f \text{ sera classé dans le groupe } j.$$

Le tableau suivant donne la répartition de l'échantillon globale selon l'affectation à postériori des épisodes de notation :

TAB. 3. Caractéristique des groupes de références

Groupes	Affectation à priori P_j	Affectation à postériori des épisodes de notation	Caractéristique des groupes
1	0.0925	1.29%(163)	situation défavorable
2	0.1704	2.79%(352)	situation assez défavorable
3	0.3490	5.18%(653)	situation assez favorable
4	0.3881	90.72%(11421)	situation favorable

a- Affectation des épisodes selon la probabilité à postériori (voir l'expression 54)

b- Les termes entre () désignent l'effectifs

D'aprés le tableau 3, la part des épisodes associés à des contextes favorables à la notation des firmes, semble être moins dominante lorsqu'on applique les probabilités à priori (non conditionnelle) par rapport à celle enregistrée avec les probabilités à posteriori. Cette différence, nous l'imputons au fait que les probabilités à posteriori tiennent compte, contrairement aux probabilités à priori, des parcours de notation des firmes. Ainsi le processus de notation semble intervenir de manière assez systématique en faveur des entreprises notées. Ce résultat nous amène à s'interroger sur l'impartialité des agences de notation dans l'évaluation des entreprises.

Dans ce qui suit, nous revenons sur le résultat de l'analyse conduite initialement pour apprécier la relation entre la variable y (contexte de notation) et les deux variables du processus de notation (durée et direction de la note) Le graphique (3) issu d'une analyse de la variance montre que, plus le contexte de notation est favorable, plus la durée moyenne estimée de l'épisode est élevé.

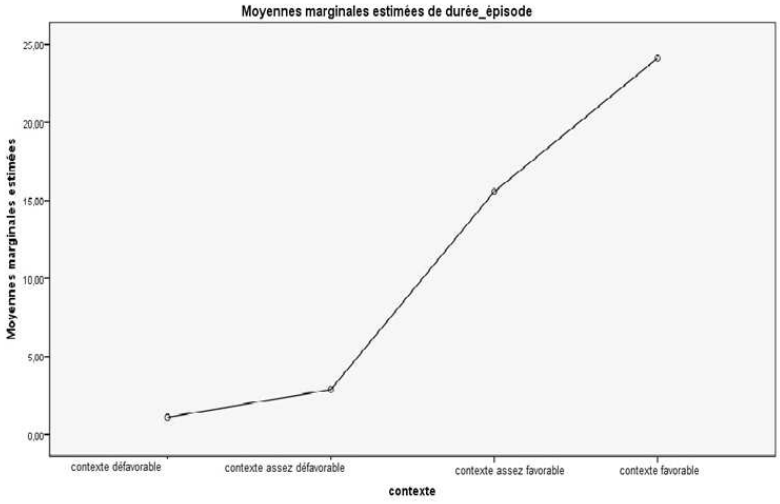


FIG. 3. Evolution du contexte des épisodes de notation en fonction de la durée

Parallèlement, cette même relation positive est constatée avec la variable direction de la note. En effet les résultats de la régression avec codage optimal[4], mobilisée à l'occasion, affiche un coefficient positif et significatif pour la variable direction de la note (voir tableau 4). c'est à dire que dans le cas d'une augmentation de la note, on a tendance à se retrouver dans le contexte favorable donc dans le groupe 4.

TAB. 4. Résultat de la régression avec codage optimal

	Béta	Erreur standard	ddl	χ^2	Sig
Type	.172	.008	2	469.273	.000

[4]Cette méthode d'analyse est appropriée car, elle facilite l'usage parallèle de variables de tout type, deuxièmement les résultats ne sont pas trop affectés par d'éventuels phénomènes de multi-colinéarité entre les variables indépendantes (voir Young et al., 1976 ; Breiman et Friedman, 1985).

Pour résumer, on peut dire que, plus la valeur de v est faible, plus on a tendance à récupérer "une baisse des notes" avec une réduction de la durée moyenne des épisodes de notation. En revanche, lorsque v prend des valeurs élevées, nous nous retrouvons avec "une amélioration de la note" et une moyenne des durées plus longues. Ces résultats sont de nature à associer les réalisations de v au contexte de notation, contexte allant des situations les plus défavorables pour les valeurs les plus faibles de v, vers les situations les plus favorables pour les valeurs les plus élevées de v.

6. Effet de la crise sur le processus de notation des firmes

Comme nous pouvons l'anticiper, la crise a modifié profondément les conditions dans lesquelles les notes sont attribuées. D'après le graphique (4), cette tendance semble se reproduire pour les trois grandes zones géographiques (à savoir, l'europe, l'asie et l'amérique du nord) mais avec une perte de vitesse pour la période aprés la crise. En effet il y a clairement un excès d'optimisme avant la crise de la part des agences pour les trois zones. Après la crise il y a une relative indécision au niveau de la situation favorable et défavorable pour les régions Europe et USA. Cette indécision est moins marquée pour la zone Asie (globalement 63% comme situation favorable ou assez favorable), la différence entre cette zone et les deux autres proviennent essentiellement du pourcentage des situations nettement défavorables (1.61% pour la première et autour de 15 % pour les deux autres)

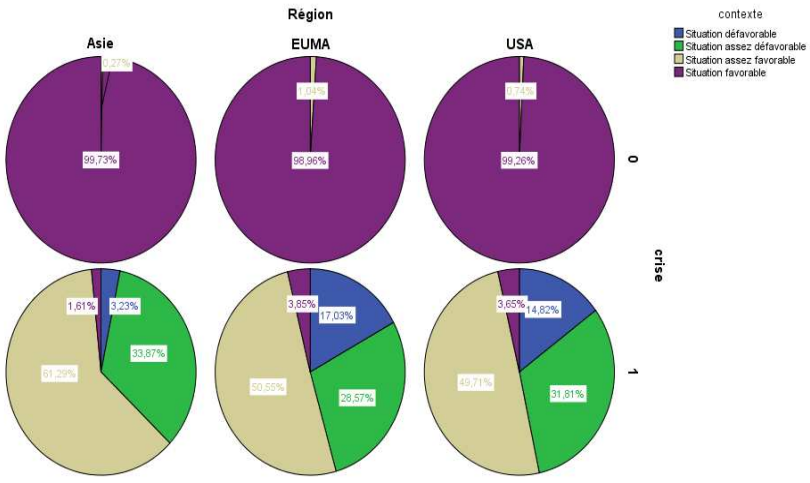


FIG. 4. Répartition des probabilités d'appartenance à un groupe par région et par crise

Dans ce qui suit, nous analysons de manière plus fine les premières conclusions générales tirées de l'observation du graphique (4) précédent. Les enseignements que nous tirons en matière d'influence de la crise sur le processus

de notation des firmes sont établis à partir des résultats d'un modèle probit ordonné exprimant la variable contexte en fonction d'une variable binaire que nous notons crise qui prend la valeur 1 lorsque la notation est réalisée après la date de la crise, 0 sinon. D'après le test de rapport de vraisemblance le modèle est significatif. Suite à l'estimation de ce modèle, nous déterminons trois seuils classés dans un ordre croissant c_1, c_2 et c_3 pour discriminer entre les quatre modalités de la variable contexte (cf : se référer au tableau 5).

Les coefficients obtenus pour les modalités de la variable crise montre que globalement le contexte de notation s'est détérioré après la date de juin 2007, c'est à dire la date de la crise. D'une manière plus explicite, la valeur de 4,233 montre que durant la période avant la crise la probabilité de se trouver dans un contexte favorable est plus importante que celle qu'on peut espérer durant la période après la crise. Cette dernière situation est retenue comme une situation de référence ce qui explique la valeur 0 pour la modalité crise =1.

Ces résultats ne peuvent que conforter l'idée selon laquelle les facteurs d'hétérogénéité non observables retenus dans notre modèle sont de nature à capter le contexte dans lequel sont opérées les notations des différentes firmes et donc notamment le contexte d'avant et après la crise.

TAB. 5. Estimation des paramètres par la méthode probit

				Intervalle de confiance 95%	
Contexte	Estimation	Erreur std	wald (ddl)	Borne inf	Borne sup
seuil 1	-1.057^{***}	.046	525.141(1)	-1.147	$-.966$
seuil 2	$-.102^{***}$	.037	7.444(1)	$-.176$	$-.029$
seuil 3	1.805^{***}	.070	656.967(1)	1.667	1.943
crise=0	4.233^{***}	.080	2778.608(1)	4.076	4.391
crise=1	0				

Log-vrais (sous H_0) : 6542.575 ; log-vrais (sousH_1) : 6516.62

Statestique du test du rapport de vraisemblance : 25.94

Degré de liberté : 1 ; Niveau de significativité < 0.01

Modèle globalement significatif

Finalement, les modèles probit introduisant un facteur latent non observable pour modéliser les paramètres (la moyenne, les seuils et la variance) fournissent des résultats satisfaisant. L'avantage d'utiliser un facteur latent non observable est dans le calcul de la probabilité à posteriori d'appartenance à des groupes. De plus ce facteur v nous a permis de classer les firmes selon leurs classe de risque (à travers la corrélation des changement de note) ce qui nous permet d'aboutir au fait que l'agence de notation Standard and Poor's avait tendance à accorder d'excellentes notes à des entreprises mais depuis la crise de 2007-2008, ces notes étaient ensuite subitement et fortement dégradées, ce qui remet en cause la qualité des prédictions de cette agence de notation, accusée d'avoir surévalué certaines firmes.

Les conclusions de notre étude rejoignent celles de la littérature qui porte sur l'effet d'un facteur d'hétérogénéité v(et/ou non observable). En effet, Altman et Kao (1992), Carty et Fons (1993), Altman (1998), Nickell *et al.* (2000), Bangia *et al.* (2002), Lando et Skødeberg (2002), Hamilton et Cantor (2004) et d'autres ont montré la présence d'un comportement non-markovien, tel que l'impact des conditions macro économiques. Dans la plupart des études, ils ont considéré ce dernier comme observable et influençant les changements de note des entreprises. Or, dans notre étude, on considère ce facteur comme inobservable. Feng *et al.* (2007) ont proposé également un modèle probit pour modéliser la matrice de transition en tenant compte d'un facteur latent stochastique. Ils n'ont pas donné une spécification exacte de ce facteur et l'ont considéré comme inobservable représentant la conjoncture économique des entreprises notées. L'importance de ce facteur est dans l'anticipation des matrices de transition. Dans notre cas, ce facteur nous a permis d'expliquer les changements de notes des firmes et de voir l'effet de la crise sur ces changements.

7. Conclusion

Nous avons introduit une variable latente non observable dans le but de capter l'effet de la crise sur le processus de notation des firmes. Notre modèle peut être considéré comme un modèle joint de la durée et de la direction que peut prendre la note en tenant compte d'un facteur latent inobservable introduit dans Gourieroux (2004). Ce facteur nous a permis d'estimer les probabilités à posteriori d'appartenance à des groupes de référence qui se distinguent par la durée moyenne de notation et de la direction de la note.

A travers le modèle probit ordonné, on a montré que les épisodes de notation considérés après la crise ont tendance à appartenir au groupe caractérisé par une durée plus courte et un abaissement de la note. Ces éléments nous ont amené à considérer ce facteur inobservable comme étant un facteur qui reflète l'état de la nature et qui peut être influencé par la crise. L'impact de ce facteur a entrainé des abaissements de la note plutôt que des hausses. Ce résultat empirique montre que la probabilité d'avoir un abaissement de la note dépend également des conditions économiques et financières et pas seulement de l'historique de notation de la firme concernée.

8. Annexe

TAB. 6. Récapitulatif du traitement des observations

Marque début			Type					
			Censuré	B. Maj	B. Min	A. Min	A. Maj	Total
			D. Ep	D. Ep	D. Ep	D. Ep	D. Ep	D. Ep
AAA	0	Effectif	7	12	0	0	0	19
		N % ligne	36,8%	63,2%	,0%	,0%	,0%	100,0%
		N % colonne	100,0%	100,0%	,0%	,0%	,0%	100,0%
		Moyenne	153,71	92,50	.	.	.	115,05
		Ecart-type	59,29	65,78	.	.	.	68,82
	1	Effectif	0	0	0	0	0	0
		N % ligne	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%
		N % colonne	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%
		Moyenne	.	.	.	.	.	.
		Ecart-type	.	.	.	.	.	.
	Total	Effectif	7	12	0	0	0	19
		N % ligne	36,8%	63,2%	,0%	,0%	,0%	100,0%
		N % colonne	100,0%	100,0%	,0%	,0%	,0%	100,0%
		Moyenne	153,71	92,50	.	.	.	115,05
		Ecart-type	59,29	65,78	.	.	.	68,82
AA	0	Effectif	31	62	38	15	1	147
		N % ligne	21,1%	42,2%	25,9%	10,2%	,7%	100,0%
		N % colonne	67,4%	100,0%	97,4%	100,0%	100,0%	90,2%
		Moyenne	118,32	44,00	40,87	32,40	62,00	57,80
		Ecart-type	53,98	36,99	37,07	17,12	.	50,46
	1	Effectif	15	0	1	0	0	16
		N % ligne	93,8%	,0%	6,3%	,0%	,0%	100,0%
		N % colonne	32,6%	,0%	2,6%	,0%	,0%	9,8%
		Moyenne	10,40	.	3,00	.	.	9,94
		Ecart-type	6,52	.	.	.	.	6,57
	Total	Effectif	46	62	39	15	1	163
		N % ligne	28,2%	38,0%	23,9%	9,2%	,6%	100,0%
		N % colonne	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		Moyenne	83,13	44,00	39,90	32,40	62,00	53,10
		Ecart-type	67,62	36,99	37,08	17,12	.	50,03
A	0	Effectif	98	128	158	47	10	441
		N % ligne	22,2%	29,0%	35,8%	10,7%	2,3%	100,0%
		N % colonne	66,2%	92,8%	96,3%	97,9%	100,0%	86,8%
		Moyenne	92,40	31,32	32,84	36,26	27,30	45,87
		Ecart-type	47,75	27,94	30,01	25,65	23,80	41,86
	1	Effectif	50	10	6	1	0	67
		N % ligne	74,6%	14,9%	9,0%	1,5%	,0%	100,0%
		N % colonne	33,8%	7,2%	3,7%	2,1%	,0%	13,2%
		Moyenne	9,78	9,00	11,67	15,00	.	9,91
		Ecart-type	7,05	5,77	7,17	.	.	6,80
	Total	Effectif	148	138	164	48	10	508
		N % ligne	29,1%	27,2%	32,3%	9,4%	2,0%	100,0%
		N % colonne	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		Moyenne	64,49	29,70	32,06	35,81	27,30	41,13
		Ecart-type	55,30	27,56	29,75	25,56	23,80	40,93

TAB. 7. Récapitulatif du traitement des observations (suite)

Marque début			Type					
			Censuré	B. Maj	B. Min	A. Min	A. Maj	Total
			D. Ep	D. Ep	D. Ep	D. Ep	D. Ep	D. Ep
BBB	0	Effectif	115	74	178	89	50	506
		N % ligne	22,7%	14,6%	35,2%	17,6%	9,9%	100,0%
		N % colonne	52,5%	83,1%	92,2%	97,8%	92,6%	78,3%
		Moyenne	66,84	23,42	31,983146	27,5506	26,94	37,38
		Ecart-type	38,57	20,17	23,867922	24,1755	20,3243	31,63
	1	Effectif	104	15	15	2	4	140
		N % ligne	74,3%	10,7%	10,7%	1,4%	2,9%	100,0%
		N % colonne	47,5%	16,9%	7,8%	2,2%	7,4%	21,7%
		Moyenne	9,04808	8,8666667	7,9333333	9	7,5	8,86429
		Ecart-type	6,90909	5,7924417	4,9923751	7,07107	0,57735	6,46542
	Total	Effectif	219	89	193	91	54	646
		N % ligne	33,9%	13,8%	29,9%	14,1%	8,4%	100,0%
		N % colonne	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		Moyenne	39,40	20,97	30,11399	27,1429	25,5	31,20
		Ecart-type	40,46	19,31	23,846677	24,0728	20,2072	30,51
BB	0	Effectif	123	116	57	98	46	440
		N % ligne	28,0%	26,4%	13,0%	22,3%	10,5%	100,0%
		N % colonne	65,1%	90,6%	75,0%	93,3%	100,0%	80,9%
		Moyenne	57,39	18,91	21,51	19,70	22,20	30,52
		Ecart-type	32,18	16,72	19,90	14,56	14,3428	27,59
	1	Effectif	66	12	19	7	0	104
		N % ligne	63,5%	11,5%	18,3%	6,7%	,0%	100,0%
		N % colonne	34,9%	9,4%	25,0%	6,7%	,0%	19,1%
		Moyenne	8,79	6,0833333	7,63	10	.	8,35
		Ecart-type	7,24	6,0821398	5,3666721	1	.	6,57
	Total	Effectif	189	128	76	105	46	544
		N % ligne	34,7%	23,5%	14,0%	19,3%	8,5%	100,0%
		N % colonne	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		Moyenne	40,42	17,70	18,04	19,06	22,20	26,28
		Ecart-type	35,07	16,44	18,42	14,28	14,3428	26,46
B	0	Effectif	125	85	158	78	88	534
		N % ligne	23,4%	15,9%	29,6%	14,6%	16,5%	100,0%
		N % colonne	62,5%	74,6%	86,8%	97,5%	100,0%	80,4%
		Moyenne	68,44	10,98	17,22	19,95	21,09	29,25
		Ecart-type	38,76	13,45	13,23	12,91	14,66	31,13
	1	Effectif	75	29	24	2	0	130
		N % ligne	57,7%	22,3%	18,5%	1,5%	,0%	100,0%
		N % colonne	37,5%	25,4%	13,2%	2,5%	,0%	19,6%
		Moyenne	10,13	3,72	6,79	4,00	.	7,99
		Ecart-type	7,47	3,88	4,59	5,65685	.	6,82
	Total	Effectif	200	114	182	80	88	664
		N % ligne	30,1%	17,2%	27,4%	12,0%	13,3%	100,0%
		N % colonne	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		Moyenne	46,58	9,13	15,84	19,55	21,09	25,09
		Ecart-type	41,92	12,18	12,93	13,01	14,66	29,31

TAB. 8. Récapitulatif du traitement des observations (suite)

Marque début			Type					
			Censuré	B. Maj	B. Min	A. Min	A. Maj	Total
			D. Ep	D. Ep	D. Ep	D. Ep	D. Ep	D. Ep
CCC	0	Effectif	13	43	11	8	16	91
		N % ligne	14,3%	47,3%	12,1%	8,8%	17,6%	100,0%
		N % colonne	37,1%	76,8%	84,6%	88,9%	94,1%	70,0%
		Moyenne	76,08	2,37	7,9090909	8,75	15,875	16,51
		Ecart-type	23,58	2,42	10,976835	6,45313	17,2158	27,67
	1	Effectif	22	13	2	1	1	39
		N % ligne	56,4%	33,3%	5,1%	2,6%	2,6%	100,0%
		N % colonne	62,9%	23,2%	15,4%	11,1%	5,9%	30,0%
		Moyenne	3,86364	3,4615385	14	8	1	4,28205
		Ecart-type	2,78252	3,1255769	0	.	.	3,64871
	Total	Effectif	35	56	13	9	17	130
		N % ligne	26,9%	43,1%	10,0%	6,9%	13,1%	100,0%
		N % colonne	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		Moyenne	30,69	2,63	8,8461538	8,66667	15	12,84
		Ecart-type	38,14	2,61	10,278182	6,04152	17,0551	23,86
CC	0	Effectif	4	29	0	0	10	43
		N % ligne	9,3%	67,4%	,0%	,0%	23,3%	100,0%
		N % colonne	30,8%	76,3%	,0%	,0%	90,9%	69,4%
		Moyenne	72,50	3,10	.	.	15,70	12,49
		Ecart-type	51,19	3,26	.	.	15,2027	25,50
	1	Effectif	9	9	0	0	1	19
		N % ligne	47,4%	47,4%	,0%	,0%	5,3%	100,0%
		N % colonne	69,2%	23,7%	,0%	,0%	9,1%	30,6%
		Moyenne	1,11	0,4444444	.	.	2	,84
		Ecart-type	1,17	1,0137938	.	.	.	1,12
	Total	Effectif	13	38	0	0	11	62
		N % ligne	21,0%	61,3%	,0%	,0%	17,7%	100,0%
		N % colonne	100,0%	100,0%	,0%	,0%	100,0%	100,0%
		Moyenne	23,08	2,47	.	.	14,45	8,92
		Ecart-type	42,80	3,09	.	.	15,0024	21,85
C	0	Effectif	0	0	0	0	1	1
		N % ligne	,0%	,0%	,0%	,0%	100,0%	100,0%
		N % colonne	,0%	,0%	,0%	,0%	100,0%	100,0%
		Moyenne	.	.	.	.	13,00	13,00
		Ecart-type	.	.	.	.	.	.
	1	Effectif	0	0	0	0	0	0
		N % ligne	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%
		N % colonne	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%
		Moyenne	.	.	.	.	.	.
		Ecart-type	.	.	.	.	.	.
	Total	Effectif	0	0	0	0	1	1
		N % ligne	,0%	,0%	,0%	,0%	100,0%	100,0%
		N % colonne	,0%	,0%	,0%	,0%	100,0%	100,0%
		Moyenne	.	.	.	.	13,00	13,00
		Ecart-type	.	.	.	.	.	.

TAB. 9. Récapitulatif du traitement des observations (suite)

Marque début			Type					
			Censuré	B. Maj	B. Min	A. Min	A. Maj	Total
			D. Ep	D. Ep	D. Ep	D. Ep	D. Ep	D. Ep
D	0	Effectif	30	0	0	0	8	38
		N % ligne	78,9%	,0%	,0%	,0%	21,1%	100,0%
		N % colonne	83,3%	,0%	,0%	,0%	100,0%	86,4%
		Moyenne	80,07	.	.	.	11,625	65,66
		Ecart-type	21,03	.	.	.	10,1691	34,14
	1	Effectif	6	0	0	0	0	6
		N % ligne	100,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	100,0%
		N % colonne	16,7%	,0%	,0%	,0%	,0%	13,6%
		Moyenne	4,5	.	.	.	.	4,5
		Ecart-type	3,08221	.	.	.	.	3,08221
	Total	Effectif	36	0	0	0	8	44
		N % ligne	81,8%	,0%	,0%	,0%	18,2%	100,0%
		N % colonne	100,0%	,0%	,0%	,0%	100,0%	100,0%
		Moyenne	67,47	.	.	.	11,625	57,32
		Ecart-type	34,40	.	.	.	10,1691	38,14
SD	0	Effectif	8	4	0	0	7	19
		N % ligne	42,1%	21,1%	,0%	,0%	36,8%	100,0%
		N % colonne	50,0%	50,0%	,0%	,0%	63,6%	54,3%
		Moyenne	98,00	4,75	.	.	7,43	45,00
		Ecart-type	31,98	4,50	.	.	7,2078	50,75
	1	Effectif	8	4	0	0	4	16
		N % ligne	50,0%	25,0%	,0%	,0%	25,0%	100,0%
		N % colonne	50,0%	50,0%	,0%	,0%	36,4%	45,7%
		Moyenne	7,25	1,75	.	.	0	4,06
		Ecart-type	9,79	0,9574271	.	.	0	7,50
	Total	Effectif	16	8	0	0	11	35
		N % ligne	45,7%	22,9%	,0%	,0%	31,4%	100,0%
		N % colonne	100,0%	100,0%	,0%	,0%	100,0%	100,0%
		Moyenne	52,63	3,25	.	.	4,73	26,29
		Ecart-type	52,14	3,41	.	.	6,72445	42,62
Total	0	Effectif	554	553	600	335	237	2279
		N % ligne	24,3%	24,3%	26,3%	14,7%	10,4%	100,0%
		N % colonne	60,9%	85,7%	90,0%	96,3%	96,0%	80,9%
		Moyenne	75,03	23,36	27,45	24,47	21,64	36,98
		Ecart-type	43,24	28,47	25,25	20,00	16,90	37,08
	1	Effectif	355	92	67	13	10	537
		N % ligne	66,1%	17,1%	12,5%	2,4%	1,9%	100,0%
		N % colonne	39,1%	14,3%	10,0%	3,7%	4,0%	19,1%
		Moyenne	8,75	5,00	7,88	9,15	3,3	7,91
		Ecart-type	7,09	5,17	5,26	3,89115	3,6833	6,64
	Total	Effectif	909	645	667	348	247	2816
		N % ligne	32,3%	22,9%	23,7%	12,4%	8,8%	100,0%
		N % colonne	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		Moyenne	49,14	20,74	25,48	23,90	20,89	31,44
		Ecart-type	46,96	27,20	24,71	19,85	16,96	35,37

TAB. 10. Résultat des estimations par Gauss pour la region USA

out_asie.txt

MAXLIK Version 4.0.24 11/02/2012 1:39 pm

Data Set: new1

return code = 0
normal convergence

Mean log-likelihood -4.23681
Number of cases 14125

Covariance matrix of the parameters computed by the following method:
Inverse of computed Hessian

Parameters	Estimates	Std. err.	Est./s.e.	Prob.	Gradient
P01	3.0424	0.0241	126.248	0.0000	0.0000
P02	-0.058	0.0171	-3.410	0.0000	0.0000
P03	-0.6966	0.0269	-25.939	0.0000	0.0000
P04	1.7555	0.0367	47.853	0.0000	0.0000
P05	-0.1340	0.0156	-8.594	0.0000	0.0000
P06	-2.1090	0.0234	-90.170	0.0000	0.0000
P07	-0.8878	0.0139	-63.906	0.0000	0.0000
P08	0.5531	0.0129	42.802	0.0000	0.0000
P09	0.2178	0.0149	14.643	0.0000	0.0000
P10	0.0127	0.0051	2.511	0.0060	0.0000
P11	0.0986	0.0161	6.142	0.0000	0.0000
P12	-0.5394	0.0535	-10.087	0.0000	0.0000
P13	-0.1854	0.0404	-4.584	0.0000	0.0000
P14	0.3730	0.0085	43.733	0.0000	0.0000
P15	3.5634	0.0911	39.111	0.0000	0.0000
P16	0.3401	0.0095	35.878	0.0000	0.0000
P17	0.9183	0.0317	29.009	0.0000	0.0000
P18	-1.2110	0.0397	-30.519	0.0000	0.0000
P19	-1.6316	0.0508	-32.120	0.0000	0.0000
P20	0.0983	0.0057	17.228	0.0000	0.0000

Correlation matrix of the parameters

1.000	0.061	-0.187	-0.241	-0.069	0.021	0.011	-0.004	0.054
-0.012	-0.086	-0.040	0.007	0.152	-0.172	-0.359	-0.637	0.020
-0.030	0.296							
0.061	1.000	-0.522	-0.330	-0.416	-0.007	-0.015	0.019	0.096
0.102	-0.014	-0.045	-0.003	-0.505	0.550	0.150	-0.372	-0.097
-0.089	-0.078							
-0.187	-0.522	1.000	0.339	0.031	0.001	0.008	-0.010	-0.057
0.036	0.019	-0.028	-0.011	-0.079	-0.203	-0.050	0.029	0.063
-0.419	0.109							
-0.241	-0.330	0.339	1.000	0.353	0.011	0.013	-0.012	-0.097
-0.039	0.016	0.234	0.002	-0.083	-0.366	-0.357	0.473	0.133
-0.228	0.277							
-0.069	-0.416	0.031	0.353	1.000	-0.004	0.000	-0.004	-0.144
-0.093	0.127	0.039	-0.019	0.206	-0.825	-0.424	0.494	0.149
0.309	0.353							
0.021	-0.007	0.001	0.011	-0.004	1.000	0.488	0.106	0.002
0.007	-0.193	0.005	0.041	-0.002	0.003	-0.008	-0.014	0.226
0.007	0.018							
0.011	-0.015	0.008	0.013	0.000	0.488	1.000	0.132	0.043
-0.024	-0.147	0.005	0.041	0.002	-0.002	-0.005	-0.006	0.201
0.001	0.011							
-0.004	0.019	-0.010	-0.012	-0.004	0.106	0.132	1.000	-0.048
0.032	0.087	-0.004	-0.025	-0.007	0.006	0.004	-0.001	0.100
-0.001	-0.006							
0.054	0.096	-0.057	-0.097	-0.144	0.002	0.043	-0.048	1.000
0.215	-0.758	-0.023	0.252	-0.054	0.166	0.080	-0.118	-0.794
0.025	-0.037							
-0.012	0.102	0.036	-0.039	-0.093	0.007	-0.024	0.032	0.215

TAB. 11. Résultat des estimations par Gauss pour la region USA (suite)

out_asie.txt

```
  1.000  -0.029  -0.019  -0.126  -0.093   0.111   0.051  -0.059  -0.564
 -0.061  -0.020
 -0.086  -0.014   0.019   0.016   0.127  -0.193  -0.147   0.087  -0.758
 -0.029   1.000  -0.014  -0.118   0.012  -0.126  -0.032   0.106   0.370
 -0.009  -0.018
 -0.040  -0.045  -0.028   0.234   0.039   0.005   0.005  -0.004  -0.023
 -0.019  -0.014   1.000   0.085  -0.126  -0.026  -0.153   0.140   0.042
 -0.140   0.184
  0.007  -0.003  -0.011   0.002  -0.019   0.041   0.041  -0.025   0.252
 -0.126  -0.118   0.085   1.000  -0.004   0.019   0.000  -0.006  -0.231
  0.007   0.013
  0.152  -0.505  -0.079  -0.083   0.206  -0.002   0.002  -0.007  -0.054
 -0.093   0.012  -0.126  -0.004   1.000  -0.412  -0.297   0.002   0.033
  0.308  -0.068
 -0.172   0.550  -0.203  -0.366  -0.825   0.003  -0.002   0.006   0.166
  0.111  -0.126  -0.026   0.019  -0.412   1.000   0.552  -0.208  -0.183
 -0.182  -0.401
 -0.359   0.150  -0.050  -0.357  -0.424  -0.008  -0.005   0.004   0.080
  0.051  -0.032  -0.153   0.000  -0.297   0.552   1.000  -0.071  -0.126
  0.129  -0.310
 -0.637  -0.372   0.029   0.473   0.494  -0.014  -0.006  -0.001  -0.118
 -0.059   0.106   0.140  -0.006   0.002  -0.208  -0.071   1.000   0.067
  0.149  -0.112
  0.020  -0.097   0.063   0.133   0.149   0.226   0.201   0.100  -0.794
 -0.564   0.370   0.042  -0.231   0.033  -0.183  -0.126   0.067   1.000
 -0.031   0.101
 -0.030  -0.089  -0.419  -0.228   0.309   0.007   0.001  -0.001   0.025
 -0.061  -0.009  -0.140   0.007   0.308  -0.182   0.129   0.149  -0.031
  1.000   0.304
  0.296  -0.078   0.109   0.277   0.353   0.018   0.011  -0.006  -0.037
 -0.020  -0.018   0.184   0.013  -0.068  -0.401  -0.310  -0.112   0.101
  0.304   1.000

Number of iterations    69
Minutes to convergence    21.31225
```

TAB. 12. Résultat des estimations par Gauss pour la region Europe-Asie

out_autre

MAXLIK Version 4.0.24 11/04/2010 11:19 am

Data Set: new1

return code = 0
normal convergence

Mean log-likelihood -3.93678
Number of cases 4136

Covariance matrix of the parameters computed by the following method:
Inverse of computed Hessian

Parameters	Estimates	Std. err.	Est./s.e.	Prob.	Gradient
P01	2.9140	0.0480	60.768	0.0000	0.0000
P02	-0.0604	0.0226	-2.679	0.0037	0.0000
P03	-0.7254	0.0411	-17.647	0.0000	0.0000
P04	1.6291	0.0696	23.420	0.0000	0.0000
P05	-0.1307	0.0354	-3.696	0.0001	0.0000
P06	-2.2806	0.0571	-39.905	0.0000	0.0000
P07	-0.9037	0.0293	-30.831	0.0000	0.0000
P08	0.7795	0.0298	26.137	0.0000	0.0000
P09	0.0568	0.0304	1.868	0.0309	0.0000
P10	0.0897	0.0116	7.727	0.0000	0.0000
P11	0.2615	0.0364	7.190	0.0000	0.0000
P12	-0.1169	0.1022	-1.144	0.1263	0.0000
P13	-0.4553	0.0790	-5.765	0.0000	0.0000
P14	0.4622	0.0237	19.511	0.0000	0.0000
P15	3.2312	0.1534	21.064	0.0000	0.0000
P16	0.3644	0.0190	19.220	0.0000	0.0000
P17	0.9876	0.0618	15.980	0.0000	0.0000
P18	-1.0485	0.0833	-12.587	0.0000	0.0000
P19	-1.5255	0.1064	-14.340	0.0000	0.0000
P20	0.0810	0.0093	8.714	0.0000	0.0000

Correlation matrix of the parameters

1.000	-0.128	-0.113	-0.361	-0.089	-0.064	-0.057	0.045	-0.127
-0.058	0.100	0.026	0.008	0.396	-0.314	-0.465	-0.734	0.123
-0.126	0.187							
-0.128	1.000	-0.260	0.278	-0.039	0.114	0.075	-0.036	0.097
-0.010	-0.148	0.032	0.010	-0.555	0.109	0.170	-0.017	0.151
-0.357	-0.076							
-0.113	-0.260	1.000	0.076	-0.140	-0.030	-0.020	0.015	-0.031
0.167	0.050	-0.168	-0.058	-0.144	-0.027	0.103	-0.161	0.007
-0.310	-0.032							
-0.361	0.278	0.076	1.000	0.332	0.171	0.127	-0.092	-0.029
0.002	-0.153	0.196	0.031	-0.628	-0.072	0.012	0.487	0.301
-0.307	0.128							
-0.089	-0.039	-0.140	0.332	1.000	-0.063	-0.049	0.028	-0.347
-0.075	0.396	0.155	0.006	-0.147	-0.800	-0.182	0.334	0.287
0.136	0.351							
-0.064	0.114	-0.030	0.171	-0.063	1.000	0.510	-0.022	0.195
-0.047	-0.440	0.039	0.072	-0.154	0.144	0.057	0.055	0.225
-0.067	-0.018							
-0.057	0.075	-0.020	0.127	-0.049	0.510	1.000	0.032	0.204
-0.080	-0.363	0.027	0.069	-0.111	0.113	0.046	0.048	0.205
-0.055	-0.029							
0.045	-0.036	0.015	-0.092	0.028	-0.022	0.032	1.000	-0.177
0.078	0.269	-0.021	-0.061	0.070	-0.077	-0.033	-0.041	0.078
0.028	0.016							
-0.127	0.097	-0.031	-0.029	-0.347	0.195	0.204	-0.177	1.000
0.176	-0.736	-0.080	0.168	-0.088	0.446	0.220	0.004	-0.659
0.005	-0.220							
-0.058	-0.010	0.167	0.002	-0.075	-0.047	-0.080	0.078	0.176

Page 1

TAB. 13. Résultat des estimations par Gauss pour la region Europe-Asie (suite)

```
                                                  out_autre
  1.000   -0.001   -0.061   -0.084   -0.058    0.094    0.109    0.003   -0.539
 -0.047   -0.052
  0.100   -0.148    0.050   -0.153    0.396   -0.440   -0.363    0.269   -0.736
 -0.001    1.000   -0.018   -0.057    0.172   -0.521   -0.167   -0.021    0.141
  0.110    0.148
  0.026    0.032   -0.168    0.196    0.155    0.039    0.027   -0.021   -0.080
 -0.061   -0.018    1.000    0.217   -0.170   -0.085   -0.111    0.086    0.163
 -0.177    0.174
  0.008    0.010   -0.058    0.031    0.006    0.072    0.069   -0.061    0.168
 -0.084   -0.057    0.217    1.000   -0.025    0.014   -0.017    0.009   -0.164
  0.000    0.048
  0.396   -0.555   -0.144   -0.628   -0.147   -0.154   -0.111    0.070   -0.088
 -0.058    0.172   -0.170   -0.025    1.000   -0.160   -0.510   -0.386   -0.188
  0.372   -0.026
 -0.314    0.109   -0.027   -0.072   -0.800    0.144    0.113   -0.077    0.446
  0.094   -0.521   -0.085    0.014   -0.160    1.000    0.450    0.130   -0.318
 -0.024   -0.370
 -0.465    0.170    0.103    0.012   -0.182    0.057    0.046   -0.033    0.220
  0.109   -0.167   -0.111   -0.017   -0.510    0.450    1.000    0.185   -0.184
  0.143   -0.049
 -0.734   -0.017   -0.161    0.487    0.334    0.055    0.048   -0.041    0.004
  0.003   -0.021    0.086    0.009   -0.386    0.130    0.185    1.000   -0.013
  0.142   -0.121
  0.123    0.151    0.007    0.301    0.287    0.225    0.205    0.078   -0.659
 -0.539    0.141    0.163   -0.164   -0.188   -0.318   -0.184   -0.013    1.000
 -0.200    0.231
 -0.126   -0.357   -0.310   -0.307    0.136   -0.067   -0.055    0.028    0.005
 -0.047    0.110   -0.177    0.000    0.372   -0.024    0.143    0.142   -0.200
  1.000    0.395
  0.187   -0.076   -0.032    0.128    0.351   -0.018   -0.029    0.016   -0.220
 -0.052    0.148    0.174    0.048   -0.026   -0.370   -0.049   -0.121    0.231
  0.395    1.000

Number of iterations    72
Minutes to convergence     7.44427
```

CHAPITRE 5

Modélisation de la contagion à l'aide de processus ponctuels marqués

1. Introduction

Ce chapitre[1] propose un nouveau modèle pour décrire l'intensité de l'effet de contagion d'évènements de crédit, tels que des changements dans la note de crédit ou la réalisation de défauts de paiement. Notre structure de modélisation est basée sur l'approche "top-down", étudié par Giesecke *et al.* (2011) et Nakagawa (2010a, 2010b). Pour ce modèle, nous utilisons un processus stochastique de type "self-exciting" afin de modéliser l'intensité des évènements de crédit dans une économie donnée. Ensuite, nous appliquons un "thinning" (amincissement) aléatoire pour spécifier l'intensité de l'évènement dans un portefeuille sous-jacent donné. Notre modèle nous permet de mesurer le risque de plusieurs portefeuilles simultanément, risque dû au phénomène de contagion.

Giesecke *et al.* (2011) ont introduit l'approche top-down pour évaluer le risque de défaut dans un portefeuille. Dans cette approche, le modèle est basé sur l'intensité du processus des instants de perte sans faire référence aux composantes du portefeuille. De plus, la méthode de "thinning" aléatoire décompose le processus ponctuel de perte en la somme des différents processus ponctuels de perte qui le constituent. Giesecke *et al.* (2011) ont proposé le modèle d'intensité de défaut d'un portefeuille basé sur le phénomène "self-exciting" (auto excitation). Le mot "self exciting" signifie que l'intensité de la réalisation du prochain instant de défaut peut augmenter notamment sous l'effet d'une prise en compte des anticipations de ce risque ou de la réalisation de celui-ci à une date antérieure.

L'analyse du risque et la recherche du prix d'un portefeuille de dérivés de crédit ont été étudiés à plusieurs reprises, en particulier par Giesecke *et al.* (2011). Ils ont par exemple analysé des "Collaterized Debt Obligation" (CDO), c'est à dire des obligations adossés à des créances. Ils ont utilisé la notion de processus d'intensité "self-exciting" pour modéliser les défauts de paiement des crédits sous-jacents à un portefeuille (CDO) d'obligations adossées à des créances (prêt étudiants, prêt pour l'achat d'une voiture, prêt hypothécaire...). L'intensité des processus n'est pas modélisée seulement par l'effet "self exciting" mais aussi par la propriété de dépendance vis-à-vis des états. De surcroît,

[1]Ce chapitre a donné lieu à un article intitulé "Contagion of rating changes : application to the valuation of CDS and CDOs".

Il a été présenté à la conférence internationale IFC 6 (Tunis, 2011).

Giesecke et Kim (2011) ont développé un générateur de données qui permet d'obtenir la date de défaut d'un portefeuille de crédit. Ce générateur est basé sur la méthode d'amincissement aléatoire appelé schéma de rééchantillonnage de type acceptation/rejet.

Quant à Nakagawa (2010a, 2010b), il a proposé le modèle d'intensité de variation de la note de crédit dans le cadre de l'approche top-down, tandis que Giesecke *et al.* (2011) et Giesecke et Kim (2011) se sont concentrés sur le modèle d'intensité de défaut de paiement. Nakagawa (2010a) a proposé le modèle d'intensité self-exciting pour le défaut de paiement mais aussi pour le changement de notation (hausse ou baisse de la note de crédit). Nakagawa (2010a) a proposé le modèle d'intensité qui a en plus de la propriété self-exciting, la propriété "mutually exciting." Par ailleurs, Nakagawa (2010a, 2010b) a aussi proposé les dérivés de crédit dénommés protection contre le multi-déclassement ("multidowngrade protection") et il a mentionné que ces modèles sont efficaces pour évaluer la protection multi-déclassement. Comme Nakagawa (2010b) l'a remarqué, les changements de la note de crédit sont en général modélisés par la matrice de l'intensité de la transition de la note (AAA —AA, AAA—CCC)). Par contre il est difficile d'utiliser la structure de la matrice de transition de la note afin d'examiner la dépendance du risque dynamique du portefeuille. Cependant, avec le modèle de Nakagawa (2010a, 2010b), on peut considérer sans grande difficulté la dépendance du risque dynamique du portefeuille.

Ce chapitre fournit un nouveau modèle qui illustre les évènements de crédit sur l'ensemble d'une économie et nous éclaire sur la manière de mesurer le risque d'un portefeuille de dérivés de crédit. Ici, les évènements de crédits peuvent être soit un changement de la note (hausse, baisse) soit un défaut de paiement. Notre modèle est une extension du modèle proposé par Nakagawa (2010a). De plus, nous allons réaliser une simulation à partir d'un algorithme fondé sur notre modèle qui peut fonctionner également avec d'autres modèles. Nous modélisons les évènements de crédit pour l'ensemble de l'économie avec un état dépendant et un processus d'intensité de type self exciting. En raison de la modélisation de l'intensité self exciting des évènements au niveau de l'économie, notre modèle peut identifier la dépendance au risque de crédit parmi plusieurs portefeuilles de crédit. Autrement dit, l'apparition d'un évènement dans un portefeuille peut influer sur l'apparition des prochains évènements dans toute l'économie et peut aussi avoir d'autres impacts sur la probabilité que cela survienne dans d'autres portefeuilles. Notre modèle d'intensité des évènements de crédits est analogue au modèle d'intensité de défaut proposé par Giesecke et Kim (2011). Cependant, étant donné que nous examinons les changements de note plutôt que les instants de défaut, notre modèle est différent. Comme nous considérons non seulement le défaut de paiement mais aussi le changement de (notation, note de crédit) nous pouvons identifier la qualité de crédit et la solvabilité des portefeuilles. Nous spécifions la méthode de thinning aléatoire en ce qui concerne la répartition de la qualité des portefeuilles, notamment avec la fréquence relative de notation dans un portefeuille

d'obligations. Notre modèle est donc particulièrement utile pour l'analyse de risque de portefeuille de dérivés de crédit comme les obligations adossées à des créances. En plus, le fait que notre modèle traite simultanément de plusieurs portefeuilles permet d'analyser plusieurs obligations adossées à des créances, ce qui est adéquat pour l'analyse des CDO-squareds (type de CDO avec une structure de double couche).

Ce chapitre est organisé comme suit : La section 2 rappelle les notions de base en vue de l'évaluation des dérivés de crédit (voir également le chapitre 2) et introduit en particulier la notion de processus self exciting pouvant permettre de modéliser la notion de contagion en risque de rédit. La section 3 fournit les éléments pour estimer le processus ponctuel modélisant l'effet de contagion. La section 4 étudie le problème de l'évaluation des options sur produits de crédit dans ce contexte.

2. Le modèle financier avec contagion

Dans ce qui suit, nous introduisons un modèle financier qui prend en compte les effets de contagion pour les évènements de crédit (hausse ou baisse de la note). Pour cela, nous introduisons des processus ponctuels marqués multi-dimensionnels. Ceci constitue une généralisation de l'intensité "self-exciting" introduite dans Errais *et al.* (2006), Nakagawa (2009), Yamanaka *et al.* (2009) et Azizpour et Giesecke (2008).

On considère l'ensemble de p firmes indexées par l. Supposons que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ soit un espace probabilisé complet. Soit $(\mathcal{F}_t)_t$ la filtration correspondante pour l'information disponible à tout temps t durant la période de gestion $[0, T]$. Indiquons par $i = 1, ..., m$ les types d'évènement de crédit. Ils représentent toutes les baisses et hausses potentielles de notation qui peuvent survenir lors d'une période de gestion. Pour chaque i, on considère la série temporelle $(T_k^i)_k$ correspondant à l'instant où l'évènement i survient (T_k^i est la date où le k-ième évènement de type i survient).

Nous avons : $\forall i = 1, ..., m$,

$$0(= T_0^i) < T_1^i < T_2^i < ....$$

La suite des instants T_k^i forme un processus ponctuel adapté à $\mathcal{F}_t$, c'est à dire encore que $(T_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt. Introduisons le processus de comptage correspondant $N_t^1, ...N_t^m$ associé au processus ponctuel $(T_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$.

Nous supposons que leurs variations quadratiques sont nulles :

$$\left[N^i, N^j\right]_t = 0 \text{ p.s. si } i \neq j,$$

Cela signifie que les processus N^i et N^j n'ont pas de covariations simultanées presque sûrement.

Si pour chaque évènement de crédit de type i, nous observons cet évènement simultanément pour plusieurs entreprises, nous devons introduire un nombre

variable de ces entreprises. On les désigne par η_k^i. Par conséquent, à chaque moment t, le nombre total L_t^i de réalisations des évènements chez toutes les entreprises est donné par :

$$L_t^i = \sum_{k=1}^{N_t^i} \eta_k^i. \tag{56}$$

Les processus $L_t^1, ..., L_t^m$ sont $(\mathcal{F}_t)_t$- adaptés. Leurs instants de variations sont modélisés par les processus ponctuels $N_t^1, ..., N_t^m$.

REMARQUE 3. *Généralement, pour chaque i, les variables aléatoires η_k^i sont supposées être distribuées de manière indépendante et identique (voir Nakagawa, 2009). Dans ce qui suit, on suppose seulement que, pour chaque $k \in \mathbb{N}$ et $i = 1, ..., m$, les variables aléatoires η_k^i sont $\mathcal{F}_{T_k^i}$ –mesurables.*

Nous devons définir maintenant le processus d'intensité λ_t^i associé à N_t^i et la mesure prévisible $\nu^i(dt, dx)$ du processus L_t^i qui est un processus strictement positif $\mathcal{F}_t$- progressivement mesurable. Nous obtenons alors les martingales M_t^i et $M_t^{L_i}$ suivantes :

$$\begin{aligned} M_t^i &= N_t^i - \int_0^t \lambda_s^i ds, \\ M_t^{L_i} &= L_t^i - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t x \ \nu^i(ds, dx). \end{aligned} \tag{57}$$

REMARQUE 4. *Étant donné que les variables η_k^i sont des variables aléatoires intégrables, en appliquant la formule (5), nous en déduisons que :*

$$\int_0^{+\infty} \int_0^t x \ \nu^i(ds, dx) = \tag{58}$$

$$\sum_{l=1}^{p} l \sum_{k\geq 0}^{n-1} \int_{T_k^i}^{T_{k+1}^i} \frac{G_k^i(ds, l)}{G_k^i([s, \infty[\times\mathbb{R})} + \int_{T_n^i}^{t} \frac{G_n^i(ds, l)}{G_n^i([s, \infty[\times\mathbb{R})} \mathbb{I}_{\{T_n^i < t \leq T_{n+1}^i\}}.$$

Nous avons aussi :

$$\int_0^t \lambda_s^i ds = \int_0^{+\infty} \int_0^t 1 \ \nu^i(ds, dx) =$$

$$\sum_{l=1}^{p} \sum_{k\geq 0}^{n-1} \int_{T_k^i}^{T_{k+1}^i} \frac{G_k^i(ds, l)}{G_k^i([s, \infty[\times\mathbb{R})} + \int_{T_n^i}^{t} \frac{G_n^i(ds, l)}{G_n^i([s, \infty[\times\mathbb{R})} \mathbb{I}_{\{T_n < t \leq T_{n+1}\}}. \tag{59}$$

Comme dans Nakagawa (2010a, 2010b), nous supposons que les intensités λ_t^i peuvent être modifiées non seulement par les occurrences de l'évènement i lui-même (l'effet "self exciting") mais peuvent aussi être affectées par des évènements de types différents de i (correspondant à l'effet "mutual exciting"). En plus, nous introduisons la possibilité que des sous-ensembles donnés d'entreprises et d'évènements influencent les autres sous-ensembles. Par exemple,

cette classification peut être liée à la fois aux zone géographiques et aux secteurs d'activité et aussi aux différents types d'évènements qui ont des degrés de gravité différents (phénomène observé durant la crise financière).

Désignons par $(f_j)_{j=1,...,J}$ les différentes classes de firmes et par $(I_{i_g})_{i_g=1,...,\Gamma}$ les différents types d'évènement de crédit. Nous supposons qu'elles forment des partitions respectives de l'ensemble des firmes et de l'ensemble des types d'évènement.

Nous introduisons des vecteurs stochastiques d'état

$$X_t^{f_j,I_{i_g}} = {}^t\left(X_t^{f_j,I_{i_g}1},...,X_t^{f_j,I_{i_g}d^{f_j,I_{i_g}}}\right),$$

qui sont des processus $d^{f_j,I_{i_g}}$- dimensionnels contrôlant les intensités de tous les sous-types d'évènements considérés.

Nous supposons que $X_t^{f_j,I_{i_g}}$ est un processus de changement affine solution de :

$$dX_t^{f_j,I_{i_g}} = (K_0^{f_j,I_{i_g}}(t)+K_1^{f_j,I_{i_g}}(t).X_t^{f_j,I_{i_g}})dt+\sum_{i=1,j=1}^{m^{f_j,I_{i_g}}}\Psi^{f_j,I_{i_g},i}dZ_t^{f_j,I_{i_g},i}, X_0^{f_j,I_{i_g}} \in \mathbb{R}^d, \tag{60}$$

où $K_0^{f_j,I_{i_g}}(t) \in \mathbb{R}^{d^{f_j,I_{i_g}}}$ et $K_1^{f_j,I_{i_g}}(t) \in \mathbb{R}^{d^{f_j,I_{i_g}}\times d^{f_j,I_{i_g}}}$ sont des fonctions déterministes, $\Psi^{f_j,I_{i_g},i}$ est une matrice diagonale $d^{f_j,I_{i_g}}$ -dimensionnelle dont les éléments sont strictement positifs et $Z_t^{f_j,I_{i_g},i}$ est un vecteur $d^{f_j,I_{i_g}}$-dimensionnel dont les éléments sont soit L_t^i soit N_t^i. Ces processus peuvent être considérés comme une généralisation des processus d'intensité pour les processus ponctuels de type mutual exciting étudiés dans Hawkes (1971) et dans Nakagawa (2010a).

Nous supposons que chaque intensité de type d'évènement est représentée par une transformation affine de type $X_t^{f_j,I_{i_g}}$. Cela implique notamment que, pour chaque $i = 1,...m$, l'intensité λ_t^i soit représentée par une expression du type :

$$\lambda_t^i = \Lambda_0^i(t) + \sum_{j=1}^{J}\sum_{i_g=1}^{\Gamma}\Lambda_1^{f_j,I_{i_g}i}(t).X_t^{f_j,I_{i_g}}, \tag{61}$$

où $\Lambda_0^i(t) \in \mathbb{R}$ et $\Lambda_1^{f_j,I_{i_g}i} \in \mathbb{R}^{d^{f_j,I_{i_g}}}$ sont des fonctions déterministes (notation : $x.y$ désigne le produit scalaire de x et y).

Une telle modélisation implique plusieurs propriétés remarquables. Tout d'abord, chaque intensité λ_t^i d'événement évolue dans le temps entre les instants où se produit l'événement i d'une façon déterministe, tandis que l'intensité peut affecter quelques événements qui surviennent directement par le processus $Z_t^{f_j,I_{i_g},i}$ et selon le coefficient $\Lambda_1^{f_j,I_{i_g}i}$ et les composantes des matrices diagonales $\Psi^{f_j,I_{i_g},i}$. Par ailleurs, le changement de chaque intensité λ_t^i survient non seulement par la réalisation de l'évènement i lui-même mais aussi par la

survenue d'autres évènements. Ce modèle de changement de notation revêt une forme plus générale que celle de Errais *et al.* (2006) et Nakagawa (2009).

3. L'estimation du processus ponctuel modélisant la contagion

3.1. Paramètres de la fonction de vraisemblance dans un processus ponctuel marqué.

On utilise le même argument de changement de mesure que dans Azizpour et Giesecke (2008) pour obtenir la fonction de vraisemblance de la contagion du modèle d'intensité d'évènement présenté dans la section précédente.

PROPOSITION 2. *Supposons que* $\Lambda^i(X_t)$ *soit le processus d'intensité du processus ponctuel* N_t^i *associé à la fonction déterministe* $\Lambda^{f_j,I_{i_g}i} : \mathbb{R}^{d^{f_j,I_{i_g}}} \to \mathbb{R}_+$. *Le processus* $N_t^i - \int_0^t \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^\Gamma \Lambda^{f_j,I_{i_g}i}(X_{s-}^{f_j,I_{i_g}})ds$ *est donc une* $(\mathcal{F}_t)$*- martingale pour chaque* $i = 1, ...m$.

Définissons le processus ρ_t^* *par :*

$$\rho_t^* =$$

$$\exp\left[-\int_0^t \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^\Gamma \log(\Lambda^{f_j,I_{i_g}i}(X_{s-}^{f_j,I_{i_g}}))dN_s^i - \int_0^t \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^\Gamma (1 - \Lambda^{f_j,I_{i_g}i}(X_s^{f_j,I_{i_g}}))ds\right], \tag{62}$$

Supposons que $\mathbb{E}[\rho_t^*] = 1$ *pour chaque* $t \in [0,T]$ *(en d'autres mots* $\{\rho_t^*\}_{t\in[0,T]}$ *est une vraie martingale sous* $\mathbb{P}$*). Supposons également que* $\mathbb{P}^*$ *soit une probabilité équivalente à* $\mathbb{P}$ *telle que le processus de densité de Radon-Nikodym de* $\mathbb{P}^*$ *par rapport à* $\mathbb{P}$ *soit donné par* ρ_t^*. *Nous avons alors :*

$$\rho_t^* = \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}/\mathcal{F}_t\right]$$

et ρ_t^* *est une* $\mathbb{P}^*$*-martingale.*

DÉMONSTRATION. Voir la théorie de Girsanov pour les variables aléatoires (Jacod et Shiryaev 2003) [2] □

REMARQUE 5. *Ceci implique que chaque* N_t^i *est un processus standard de Poisson par rapport à la probabilité* $\mathbb{P}^*$ *pour chaque* i *et* $t < s$. *Nous avons en particulier*

$$\mathbb{P}^*(N_s^i - N_t^i = 0/\mathcal{F}_t) = e^{-(s-t)}.$$

Dans ce qui suit, nous déterminons la fonction de vraisemblance pour notre modèle.

Soit $(\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta}^i) := \left\{(\widetilde{\tau}_k^i, \widetilde{\eta}_k^i)\right\}_{k=1,...,\widetilde{N}_T^i}$ un ensemble d'échantillons observés durant la période $[0,T]$ d'un processus ponctuel marqué Z_t^i pour $i = 1, ...m$. Cela

[2] Une preuve similaire est donnée dans Azizpour et Giesecke (2008) et dans Nakagawa (2009).

signifie que $(\widetilde{\tau}_k^i, \widetilde{\eta}_k^i)$est le k-ième type d'événement i qui survient au temps τ_k^i avec le nombre correspondant η_k^i des entreprises affectées par l'évènement i au même moment $\widetilde{\tau}_k^i$.

Désignons par $\mathcal{L}(\Theta/\left\{\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta}^i\right\}_{i=1,\dots m})$ la fonction de vraisemblance de l'ensemble des paramètres Θ contenu dans $\left(X_t^{f_j,I_{i_g}}\right)_{j,i_g}$.

Pour $d\mathbb{P}^* = \rho_T^*(\Theta)d\mathbb{P}_\Theta$, nous avons :

$$\mathcal{L}(\Theta/\left\{\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta}^i\right\}_{i=1,\dots m}) = \mathbb{P}_\Theta(\left\{\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta}^i\right\}_{i=1,\dots m})$$

$$= \mathbb{E}^* \left[\frac{1}{\rho_T^*(\Theta)} \middle| \left\{\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta}^i\right\}_{i=1,\dots m} \right] \mathbb{P}^*(\left\{\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta}^i\right\}_{i=1,\dots m})$$

$$= \frac{\mathbb{P}^*(\left\{\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta}^i\right\}_{i=1,\dots m})}{\rho_T^*(\Theta; \left\{\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta}^i\right\}_{i=1,\dots m})} \tag{63}$$

L'égalité précédente se déduit de la propriété que $\rho_T^*(\Theta)$ devient apparent si $\left\{\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta}^i\right\}_{i=1,\dots m}$ sont donnés.

On note $a_i = \mathbb{P}^*(\left\{\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta}^i\right\}_{i=1,\dots m})$.

Donc nous en déduisons la formule donnant l'expression de la vraisemblance :

$$\mathcal{L}(\Theta/\left\{\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta}^i\right\}_{i=1,\dots m}) = a_i \times 1/\rho_T^*(\Theta; \left\{\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta}^i\right\}_{i=1,\dots m}$$

$$= a_i \exp \left[\begin{array}{c} \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^\Gamma \log(\Lambda^{f_j,I_{i_g}i}(X_{s-}^{f_j,I_{i_g},\Theta}))dN_s^i \\ - \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^\Gamma (1 - \Lambda^{f_j,I_{i_g}i}(\widetilde{X}_s^{f_j,I_{i_g},\Theta}))ds \end{array} \right]$$

$$= \prod_{i=1}^m \exp \left[\begin{array}{c} \int_0^T \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^\Gamma \log(\Lambda^{f_j,I_{i_g}i}(\widetilde{X}_{s^-}^{f_j,I_{i_g},\Theta}))dN_s^i \\ - \int_0^T \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^\Gamma \Lambda^{F_j,I_{i_g}i}(\widetilde{X}_s^{f_j,I_{i_g},\Theta}))ds \end{array} \right] \tag{64}$$

Ici $\widetilde{X}_s^\Theta$ représente la trajectoire suivie par l'échantillon de X construit à travers la donnée des $\left\{\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta}^i\right\}_{i=1,\dots m}$.

REMARQUE 6. *L'expression précédente implique que, si $\Lambda^{f_j,I_{i_g}i}(\widetilde{X}_s^\Theta)$ dépend uniquement des paramètres des sous-ensembles $\Theta^{f_j,I_{i_g}i}$, alors chaque ensemble de paramètres $\Theta^{f_j,I_{i_g}i}$peut être estimé en utilisant l'estimation du maximum de vraisemblance séparément pour chaque évènement de type i.*

3.2. Prévision conditionnelle du processus ponctuel marqué avec une intensité affine dans le cas multivarié.

Comme nous l'avons vu, il est utile d'obtenir pour certaines applications une représentation explicite de

$$\mathbb{E}\left[Z_T^{f_j,I_{i_g}i}/\mathcal{F}_t\right](0 \leq t \leq T)$$

lorsque $Z_T^{f_j,I_{i_g}i} = L_t^{f_j,I_{i_g}i}$ ou $Z_T^{f_j,I_{i_g}i} = N_t^{f_j,I_{i_g}i}$.

Nous notons qu'en considérant la paire (X_t, Z_t), le modèle introduit dans la section précédente remplit les conditions d'un processus de diffusion affine étudié dans Duffie *et al.* (2000). Pour une analyse rigoureuse au sujet de la distribution ainsi que des moments des processus ponctuels, nous devons généralement discuter des caractéristiques de la fonction $Z_T^{f_j,I_{i_g}i}$. Comme dans cette étude nous devons disposer de prévisions conditionnelles telles que $\mathbb{E}\left[Z_T^{f_j,I_{i_g}i}/\mathcal{F}_t\right]$, nous mentionnons le résultat suivant.

PROPOSITION 3. *On suppose que $X^{f_j,I_{i_g}i_t}$ est un processus vectoriel de transition affine qui satisfait (60) et que le processus de transition $Z_t^{f_j,I_{i_g}}$ est donnée par $\Lambda_0^{f_j,I_{i_g}i}(t)+\Lambda_1^{f_j,I_{i_g}i}(t)\cdot X_t$ pour les fonctions déterministes $\Lambda_0^{f_j,I_{i_g}}(t) \in \mathbb{R}$. De plus, soit $Y_t^{f_j,I_{i_g}} =^t (X_t^{f_j,I_{i_g}}, Z_t^{f_j,I_{i_g}})$ et $\eta_{mean}^{f_j,I_{i_g}i}$ le vecteur dont les éléments sont les moyennes de l'amplitude des sauts de Z_t^i.*

Par exemple, nous avons :

$$\begin{aligned}\eta_{mean}^{f_j,I_{i_g}i} &= \sum_{k\geq 1} kP(\eta^{f_j,I_{i_g}i}=k) \text{ si } Z_t^{f_j,I_{i_g}i} = L_t^{f_j,I_{i_g}i}\\ &\quad et\\ \eta_{mean}^{f_j,I_{i_g}i} &= 1 \text{ si } Z_t^{f_j,I_{i_g}i} = N_t^{f_j,I_{i_g}i}.\end{aligned}$$

Alors ,pour chaque $i \in \{1,...m\}$ et $T \geq t$,on a :

$$\mathbb{E}\left[Z_t^{f_j,I_{i_g}i}/\mathcal{F}_t\right] = A_{z^{F_j,I_{i_g}i}}(t,T) + B_{z^{f_j,I_{i_g}i}}(t,T).Y_t$$

où $A_{z^{f_j,I_{i_g}i}}(t,T) \in \mathbb{R}$ et $B_{z^{f_j,I_{i_g}i}}(t,T) \in \mathbb{R}^{d+m}$ sont données comme suit :

$$B_{z^{f_j,I_{i_g}i}}(t,T) =$$

$$\exp\left(\int_t^T \begin{bmatrix} {}^tK_1^{f_j,I_{i_g}}(s) & O_{d\times m} \\ O_{m\times d} & O_{m\times m}\end{bmatrix}\right) e_{d+i}^{f_j,I_{i_g}} \times$$

$$\exp\left(\int_t^T \sum_{i=1}^m \left\{\begin{pmatrix}\Lambda_1^{f_j,I_{i_g}i}(s)\\ O_m\end{pmatrix}.{}^t\eta_{mean}^{f_j,I_{i_g}i}\right\}\begin{bmatrix}\Psi^{f_j,I_{i_g}i} & O_{d\times m}\\ O_{m\times d} & U_{m\times m}^i\end{bmatrix} ds\right) e_{d+i}^{f_j,I_{i_g}} \quad (65)$$

et

$$A_{z^{f_j,I_{i_g}i}}(t,T) = \quad (66)$$

$$\int_t^T \left\{\begin{pmatrix}K_0^{f_j,I_{i_g}}(s)\\ O_{m'}\end{pmatrix} + \sum_{i=1}^m \Lambda_0^{f_j,I_{i_g}i}(s).\begin{pmatrix}\Psi^{f_j,I_{i_g}i} & O_{d\times m}\\ O_{m\times d} & U_{m\times m}^i\end{pmatrix}\eta_{mean}^{f_j,I_{i_g}i}\right\}.B_{z^{f_j,I_{i_g}i}}(s,T)ds$$

où $U_{m\times m}^{f_j,I_{i_g}i}$ *est une matrice diagonale telle que l' élément correspondant à* $Z^{f_j,I_{i_g}i}$ *est égal à un et tous les autres éléments sont égaux à zéro et* $e_k^{f_j,I_{i_g}}$ *est un vecteur de telle sorte que seul le k-ième élément est égal à un, tous les autres étant égaux à* 0.

DÉMONSTRATION. On se réfère à la proposition A.2 et au corollaire A.3 dans Errais et al. (2010) pour la preuve et la discussion reliée. □

3.3. Exemples.

3.3.1. *Exemple 1 Exemple de Nakagawa (2010a).*

Supposons que la partition $(I_{i_g})_{i_g\in\{1,...,\Gamma\}}$ des événements de crédit corresponde aux différents évènements i eux-mêmes.

Nous retrouvons alors l'exemple de Nakagawa (2010a). Comme pour chaque événement d'intensité, nous proposons que chaque état de processus X_t^j $(i = 1, ..., m)$ devienne simplement l'intensité correspondante aux types de l'événement à savoir $\lambda_t^i = X_t^i$ $(i = 1, ..., m)$.

Nous supposons que $X_t =^t (X_t^1, ..., X_t^m)$ satisfait les équations différentielles stochastiques de type affine suivantes :

$$\begin{pmatrix} X_t^1 \\ ... \\ X_t^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1(c^1 - X_t^1) \\ ... \\ k^m(c^m - X_t^m) \end{pmatrix} dt + \sum_{j=1}^{m} \begin{pmatrix} \xi^{1,j} \\ ... \\ \xi^{m,j} \end{pmatrix} dL_t^j,$$

où $k^i, c^i, \left\{\xi^{i,j}\right\}_{j=1,...,m} (i = 1, ..., m)$ et la valeur initiale X_0^i sont toutes des constantes strictement positives.

On note que X_t^i $(i = 1, ..., m)$ peut être représenté comme suit :

$$X_t^i = c^i + e^{-k^i t}(X_0^i - c^i) + \int_0^t e^{-k^i(t-s)} \sum_{j=1}^{m} \xi^{i,j} dL_s^j. \tag{67}$$

Lorsque nous pouvons utiliser la fonction de vraisemblance pour (64), celle-ci est donnée par :

$$\mathcal{L}(\left\{\Theta^i\right\}_{i=1,...,m} / \{\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta}\}) = \prod_{i=1}^{m} \exp\left[\int_0^T \log(\widetilde{X}_{s^-}^{i,\Theta i}) d\widetilde{N}_s^j - \int_0^T (\widetilde{X}_s^{i,\Theta^i}) ds\right],$$

où $\widetilde{X}_s^{i,\Theta^i}$est une trajectoire de X_t^i quand les observations $(\widetilde{\tau}, \widetilde{\eta})$ sont données. Ceci implique que chaque ensemble de paramètres Θ^i peut être obtenu séparément pour $i = 1, ..., m$.

Nous notons que la maximisation de la fonction Log de vraisemblance $\mathcal{L}(\Theta^i/\{\widetilde{\tau},\widetilde{\eta}\}) = \log \mathcal{L}(\Theta^i/\{\widetilde{\tau},\widetilde{\eta}\})$ est équivalente a la maximisation du terme suivant :

$$\int_0^T \log(\widetilde{X}_{s^-}^{i,\Theta^i}) d\widetilde{N}_s^i - \int_0^T (\widetilde{X}_s^{i,\Theta^i}) ds.$$

Utilisant (68), nous pouvons représenter la fonction objective à maximiser en déterminant le maximum de l'estimateur de vraisemblance de Θ^i comme suit :

$$\sum_{k=1}^{\widetilde{N}_T^i} \log \left\{ c^i + e^{-k^i \widetilde{\tau}_k^i}(X_0^i - c^i) + \sum_{j=1}^m \xi^{i,j} \sum_{\widetilde{\tau}_p^j < \widetilde{\tau}_k^i} \widetilde{\eta}_p^j e^{-k^i(\widetilde{\tau}_k^i - \widetilde{\tau}_p^j)} \right\}$$

$$-c^i T - \frac{X_0^i - c^i}{k^i}(1 - e^{-k^i T}) \; - \frac{1}{k^i} \sum_{j=1}^m \xi^{i,j} \sum_{k=1}^{\widetilde{N}_t^i} \widetilde{\eta}_k^j (1 - e^{-k^i(T - \widetilde{\tau}_k^j)})$$

3.3.2. *Example 2. Différentiation par classes de firme.*

Introduisons maintenant la partition $(f_j)_{j\in\{1,...,J\}}$ des firmes et $(I_{i_g})_{i_g\in\{1,...,\Gamma\}}$ la partition des types d'évènements.

Nous supposons également que chaque état de processus $X_t^{f_j,I_{i_g}i}$ $(i = 1,...,m)$ corresponde simplement à l'intensité correspondante aux types de l'événement à savoir $\lambda_t^{f_j,I_{i_g}i} = X_t^{f_j,I_{i_g}i}$ $(i = 1,...,m)$.

Nous supposons que $X_t^{F,G} =^t (X_t^{f_j,I_{i_g}1},...,X_t^{f_j,I_{i_g}m})$ satisfait les équations différentielles stochastiques de type affine suivantes :

$$\begin{pmatrix} X_t^{f_j,I_{i_g}1} \\ ... \\ X_t^{f_j,I_{i_g}m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1(c^1 - X_t^{f_j,I_{i_g}1}) \\ ... \\ k^m(c^m - X_t^{f_j,I_{i_g}m}) \end{pmatrix} dt + \sum_{j=1}^m \begin{pmatrix} \xi^{1,j} \\ ... \\ \xi^{m,j} \end{pmatrix} dL_t^{f_j,I_{i_g}j},$$

où $k^{f_j,I_{i_g}i}, c^{f_j,I_{i_g}i}, \left\{\xi^{f_j,I_{i_g}ii,j}\right\}_{j=1,...,m}$ $(i = 1,...,m)$ et la valeur initiale $X_0^{f_j,I_{i_g}i}$ sont toutes des constantes strictement positives.

On note que $X_t^{f_j,I_{i_g}i}$ $(i = 1,...,m)$ peut être représenté comme suit :

$$X_t^{f_j,I_{i_g}i} =$$

$$c^{f_j,I_{i_g}i} + e^{-k^{f_j,I_{i_g}i}t}(X_0^{f_j,I_{i_g}i} - c^i) + \int_0^t e^{-k^{f_j,I_{i_g}i}(t-s)} \sum_{j=1}^m \xi^{f_j,I_{i_g}i,j} dL_s^{f_j,I_{i_g}j}. \quad (68)$$

Lorsque nous pouvons utiliser la fonction de vraisemblance pour (64), celle-ci est donnée par :

$$\mathcal{L}(\left\{\Theta^{f_j,I_{i_g}i}\right\}_{i=1,...,m} / \{\widetilde{\tau},\widetilde{\eta}\}) =$$

$$\prod_{i=1}^m \exp\left[\int_0^T \log(\widetilde{X}_{s^-}^{f_j,I_{i_g}i,\Theta i}) d\widetilde{N}_s^j - \int_0^T (\widetilde{X}_s^{f_j,I_{i_g}i,\Theta^i}) ds\right],$$

où $\widetilde{X}_s^{i,\Theta^{f_j,I^i_{i_g}}}$ est une trajectoire de $X_t^{f_j,I_{i_g}i}$ quand les observations $(\widetilde{\tau},\widetilde{\eta})$ sont données. Ceci implique que chaque ensemble de paramètres $\Theta^{f_j,I_{i_g}i}$ peut être obtenu séparément pour $i=1,...,m$.

Nous notons que la maximisation de la fonction Log de vraisemblance $\mathcal{L}(\Theta^{f_j,I_{i_g}i}/\{\widetilde{\tau},\widetilde{\eta}\}) = \log\mathcal{L}(\Theta^{f_j,I_{i_g}i}/\{\widetilde{\tau},\widetilde{\eta}\})$ est équivalente à la maximisation du terme suivant :

$$\int_0^T \log(\widetilde{X}_{s^-}^{f_j,I_{i_g}i,\Theta^{F_j,I_{i_g}i}})d\widetilde{N}_s^i - \int_0^T (\widetilde{X}_s^{f_j,I_{i_g}i,\Theta^{F_j,I_{i_g}i}})ds.$$

Utilisant (68), nous pouvons représenter la fonction objective à maximiser en déterminant le maximum de l'estimateur de vraisemblance de $\Theta^{f_j,I_{i_g}i}$ comme suit :

$$\sum_{k=1}^{\widetilde{N}_T^{f_j,I_{i_g}i}} \log\left\{\begin{array}{c} c^{f_j,I_{i_g}i}+e^{-k^{f_j,I_{i_g}i}\widetilde{\tau}_k^{f_j,I_{i_g}i}}(X_0^{f_j,I_{i_g}i}-c^{f_j,I_{i_g}i}) \\ +\sum_{j=1}^m \xi^{f_j,I_{i_g}i,j}\sum_{\widetilde{\tau}_p^j<\widetilde{\tau}_k^i}\widetilde{\eta}_p^{f_j,I_{i_g}j}e^{-kf_j,I^i_{i_g}(\widetilde{\tau}_k^{f_j,I_{i_g}i}-\widetilde{\tau}_p^{f_j,I_{i_g}j})} \end{array}\right\}$$

$$-c^{f_j,I_{i_g}i}T-\frac{X_0^{f_j,I_{i_g}i}-c^{f_j,I_{i_g}i}}{k^{f_j,I_{i_g}i}}(1-e^{-k^{f_j,I_{i_g}i}T})$$

$$-\frac{1}{k^{f_j,I_{i_g}i}}\sum_{j=1}^m \xi^{f_j,I_{i_g}i,j}\sum_{k=1}^{\widetilde{N}_t^{f_j,I_{i_g}i}}\widetilde{\eta}_k^{f_j,I_{i_g}j}(1-e^{-k^{f_j,I_{i_g}i}(T-\widetilde{\tau}_k^{f_j,I_{i_g}j})})$$

3.3.3. *Example 3. Autres dynamiques pour X.*

Dans les deux premiers exemples, la partie "drift" ne comporte pas de terme justifiant un "mutual exciting".

Nous pouvons envisager une extension prenant en compte également ce phénomène pour cette partie "drift". A titre d'exemple, nous pouvons introduire des équations d'évolution du type :

$$\begin{pmatrix} X_t^1 \\ ... \\ X_t^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m k^{1,k}(c^{1,k}-X_t^k) \\ ... \\ \sum_{k=1}^m k^{m,k}(c^{m,k}-X_t^k) \end{pmatrix} dt + \sum_{j=1}^m \begin{pmatrix} \xi^{1,j} \\ ... \\ \xi^{m,j} \end{pmatrix} dL_t^j.$$

4. Evaluation de certains CDO

Ci-après, nous utilisons l'évaluation neutre au risque pour un produit structuré classique de type "Multi-Downgrade Protection" (MDP).

4.1. L'évalution neutre au risque.

Soit N_t^* le processus dénombrant le déclenchement des décotes de notre produit cible, et soit L_t^* désignant le processus du nombre cumulatif de la cible décotée au temps t (nous admettons implicitement qu'il peut subvenir plus qu'une baisse de note à la fois et au même moment).

Désignons par C_t^T le processus $(\mathcal{F}_t)-$prévisible continu qui représente le gain de protection au temps t si la baisse de cotation d'une cible survient.

Soit Q la mesure de probabilité neutre au risque et soit $Z(t,T)$ le prix au temps t d'une obligation zéro défaut avec une maturité T donné par :

$$Z(t,T) = E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_u du\right)/\mathcal{F}_t\right].$$

Comme le processus L_t^* désigne le cumul des décotes possibles, nous en déduisons que la valeur V_t^T au temps t d'une protection leg^{12} de MDP avec une échéance T $(\geq t)$ est un processus de gain C_t^T spécifié comme suit :

$$V_t^T = E^Q\left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) C_s^T \, dL_t^* \,/\mathcal{F}_t\right].$$

Utilisant la formule d'intégration par parties, nous déduisons :

$$V_t^T =$$

$$E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_u du\right) C_T L_T^*/\mathcal{F}_t\right]$$

$$-L_t^* \, C_t^T - E^Q\left[\int_t^T L_s^* \, d\left\{\exp\left(-\int_t^s r_u du\right) C_s^T\right\}/\mathcal{F}_t\right] =$$

$$E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_u du\right) C_T L_T^*/\mathcal{F}_t\right] - L_t^* \, C_t^T +$$

$$E^Q\left[\int_t^T L_s^* \, r_s \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) C_s^T \,/\mathcal{F}_t\right]$$

$$-E^Q\left[\int_t^T L_s^* \, \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) dC_s^T \,/\mathcal{F}_t\right].$$

Pour poursuivre ce calcul, nous supposons que :

1. $\{r_t\}$ et $\{L_t^*\}$ sont indépendants.

2. Pour T fixé, σ_t^T est un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté positif qui représente la volatilité d'une obligation a zéro coupon avec risque de défaut nul. Donc le prix dynamique de $Z(t,T)$ sous Q est spécifié comme suit :

$$dZ(t,T) = Z(t,T)\left\{r_t dt + \sigma_t^T dW_t^Z\right\},$$

avec $Z(T,T) = 1$ et où W_t^Z est un Q- mouvement brownien standard indépendant de r_t et L_t^*.

3. Pour une date T déterminée, C_t^T est donné par $Z(t,T)\varphi(t,T)$ où $\varphi(t,T)$ est un $(\mathcal{F}_t)$ processus adapté défini par :

$$\varphi(t,T) := \int_t^T E^Q\left[\overline{h}_u/\mathcal{F}_t\right] du,$$

et le processus $\overline{h}_t$ suit la dynamique suivante sous Q :

$$d\overline{h}_u = \alpha\left(\beta - \overline{h}_t\right) dt + \sigma_h dW_t^h,$$

avec $\overline{h}_0 > 0$ et où α, β et σ_h sont des constantes positives et W_t^h est un mouvement Brownien standard qui est indépendant de r_t et L_t^* et W_t^Z.

Sous la troisième hypothèse, nous pouvons obtenir les représentations explicites de $\varphi(t,T)$ comme ci-dessous. En effet, en raison des propriétés du modèle de Vasicek pour les types de taux d'intérêt, on voit que, pour $s \geq t$:

$$\overline{h}_s = \overline{h}_t \exp^{-\alpha(s-t)} + \beta\left(1 - \exp^{-\alpha(s-t)}\right) + \sigma_h \exp^{-\alpha(s-t)} \int_0^{s-t} \exp^{\alpha u} dW_u^h.$$

Donc on obtient :

$$E^Q\left[\overline{h}_s/F_t\right] = (\overline{h}_t - \beta)\exp^{-\alpha(s-t)} + \beta,$$

d'où :

$$\varphi(t,T) =$$

$$\int_t^T \left\{(\overline{h}_t - \beta)\exp^{-\alpha(u-t)} + \beta\right\} du = \frac{(\overline{h}_t - \beta)}{\alpha}\left(1 - \exp^{-\alpha(s-t)}\right) + \beta\,(T-t)$$

En plus, nous pouvons nous assurer de la dynamique de $\varphi(t,T)$ donnée par $\varphi(T,T) = 0$ et

$$d\varphi(t,T) = -\overline{h}_t dt + \frac{\sigma_h}{\alpha} dW_t^h.$$

On obtient :

$$dC_t^T = \varphi(t,T)dZ(t,T) + Z(t,T)d\varphi(t,T)$$

$$= \left\{C_t^T\, r_t - Z(t,T)\overline{h}_t\right\} dt + \sigma_t^Z C_t^T\, dW_t^Z + Z(t,T)\frac{\sigma_h}{\alpha} dW_t^h$$

Maintenant, nous pouvons calculer la valeur V_t^T du produit structuré. Elle est donnée par :

$$V_t^T =$$

$$-C_t^T\, L_t^* + E^Q\left[\int_t^T L_s^*\, r_s \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) C_s^T\, ds/\mathcal{F}_t\right]$$

$$-E^Q\left[\int_t^T L_s^*\, \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) [dY_t]\, C_s^T\, /\mathcal{F}_t\right]$$

avec

$$dY_t = \left\{C_s^T\, r_s - Z(s,T)\overline{h}_s\right\} ds + \sigma_s^Z C_s^T\, dW_s^Z + Z(s,T)\frac{\sigma_h}{\alpha} dW_s^h$$

Nous en déduisons :

$$V_t^T = -C_t^T\, L_t^* + E^Q\left[\int_t^T L_s^*\, \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) Z(s,T)\overline{h}_s ds/\mathcal{F}_t\right]$$

$$= -C_t^T\, L_t^* + Z(t,T)\int_t^T E^Q\left[L_s^*\, /F_t\right] E^Q\left[\overline{h}_s/\mathcal{F}_t\right] ds. \tag{69}$$

– La première égalité provient de l'observation $\varphi(t,T) = 0$;

– La deuxième découle de la propriété martingale de l'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien ;

– La dernière égalité est due à l'hypothèse d'indépendance conditionnelle par L_t^* , r_t et $\overline{h}_t$ et des réitérations conditionnelles des prévisions.

L'espérance conditionnelle $E^Q\left[\overline{h}_s/\mathcal{F}_t\right]$ étant déjà connue, la question qui reste à résoudre est celle du calcul de $E^Q[L_s^*\, /\mathcal{F}_t]$. Ce problème est résolu par les arguments exposés dans la section 2.

Soient h_t^1 et h_t^2 les processus de différentiel de taux (Spread) de crédit pour cotation 1 (Haute qualité de crédit) et cotation 2 (basse qualité de crédit) respectivement. Généralement, l'inégalité $h_t^2 > h_t^1$ est vérifiée. Nous identifions $\overline{h}_t$ avec $h_t^2 - h_t^1$.

L'hypothèse de l'indépendance entre r_t et W_t^h nous permet de procéder au calcul jusqu'à la fin.

Nous obtenons :

$$E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T \left(r_u + h_u^1\right) du\right) /\mathcal{F}_t\right] - E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T \left(r_u + h_u^2\right) du\right) /\mathcal{F}_t\right]$$

$$= Z(t,T)E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T h_u^1 du\right) - \exp\left(-\int_t^T h_u^2 du\right) /\mathcal{F}_t\right]$$

$$\approx Z(t,T)E^Q\left[\int_t^T \left\{h_u^2 - h_u^1\right\} du/\mathcal{F}_t\right]$$

$$= Z(t,T)\int_t^T E^Q\left(h_u^2 - h_u^1/F_t\right) du$$

$$= Z(t,T)\varphi(t,T)$$

Ici, la seconde approximation est due à l'approximation $e^{-x} \approx 1 - x$ si x est suffisamment proche de 0.

4.2. L'évaluation des swaps.

Considérons des swaps basées sur un portefeuille dont les titres n qui le constituent ont un notionnel égal à 1, une date de maturité T, des dates de paiement pour les primes $(t_m)_m$. La perte en cas de défaut est notée $\ell_k \in [0,1]$. Le swap est spécifié par un attachement inférieur $\underline{K} \in [0,1]$ et un attachement supérieur $\overline{K} \in (\underline{K}, 1]$. (Un swap d'indice a les points d'attachement $\underline{K} = 0$ et $\overline{K} = 1$). Le swap notionnel est donné par $K = n(\overline{K} - \underline{K})$. Le vendeur de la protection couvre les pertes sur le portefeuille quand elles surviennent, mais uniquement lorsque les pertes cumulées sont plus importantes que $\underline{K}$ mais ne dépassent pas $\overline{K}$. Les paiements cumulé au temps t, désignés par U_t, sont donnés par le Call spread suivant :

$$U_t = (L_t - \underline{K}n)^+ - \left(L_t - \overline{K}n\right)^+$$

La valeur à l'instant $t \leq T$ de ces paiements est donnée par :

$$D_t = E\left(\int_t^T \exp^{-r(s-t)}\, dU_s / \mathcal{F}_t\right),$$

où la mesure de référence Q est une mesure neutre au risque, en tenant compte du taux d'intérêt $r > 0$. Par l'intégration par parties de Stieljes, on peut facilement exprimer la valeur D_t en termes d'espérances conditionnelles de U :

$$D_t = \exp^{-r(T-t)} E\left(U_T/\mathcal{F}_t\right) - U_t + r\int_t^T \exp^{-r(s-t)} E\left(U_s/\mathcal{F}_t\right) ds. \tag{70}$$

L'acheteur (de la protection) reçoit le paiement de la perte et en retour fait un paiement d'une prime pour le vendeur (de la protection). Chaque paiement de prime a deux parties. La première partie est un paiement d'avance, qui est exprimé comme une fraction Fr de la tranche notionnelle K. Pour un index swap, $Fr = 0$. La deuxième partie consiste en des paiements proportionnels à la prime notionnelle I_t, qui est donnée par $n - (N_t \wedge n) = n + (N_t - n)^+ - N_t$ .Pour un index swap et $K - U_t$ pour un swap de tranche avec $K < 1$. Soit c_m la fraction du nombre de jours pour la période m (environ $\frac{1}{4}$ pour des paiements trimestriels). Par la suite, on désigne par S la prime de taux courant, la valeur au temps $t \leq T$ de paiement de primes est donnée par :

$$P_t(F,S) = Fr.K + S\sum_{t_m \geq t} \exp^{-r(t_m - t)}\, c_m E\left(I_{t_m}/\mathcal{F}_t\right). \tag{71}$$

Pour une fraction Fr fixée d'avance, le spread courant S_t au temps t est la solution $S = S_t$ de l'équation $D_t = P_t(Fr, S_t)$. Pour un $D_t = P_t(Fr, S)$ fixé, nous déduisons la valeur $Fr = Fr_t$ au temps t.

Les formules (70) et (71) indiquent que ces taux dépendent seulement des options d'achat $E((v.L_s - c)^+ | \mathcal{F}_t)$ avec plusieurs prix d'exercice c, de maturité $s \in (t, T]$, et de valeur $v \in \{(0,1)^\top, (1,0)^\top\}$. Alors, pour évaluer un swap,

nous avons seulement besoin de calculer les valeurs des options en N et L. Une approche pour calculer ces valeurs est d'intégrer l'option en fonction du paiement $(x-c)^+$ en tenant compte de la distribution du le processus ponctuel.

Comme montré dans la première section, des formules quasi-explicites peuvent être établies pour déterminer les différentes espérances conditionnelles nécessaires au calcul des prix.

Nous pouvons aussi appliquer les approximations du point celle développées par Glasserman et Kyoung-Kuk (2009) pour un modèle de diffusion affine. Ils sont applicables ici puisque la transformation utilisée est une fonction affine exponentielle de l'intensité. Notons aussi que le swap de l'indice spread peut être exprimé en termes de $E(v.\ J_s|\mathcal{F}_t)$.

5. Conclusion

Comme illustré dans ce chapitre, l'utilisation de processus self-exciting permet de prendre en compte les phénomènes de contagion. Ceux-ci peuvent se produire en particulier entre zones géographiques et entre secteurs d'activité. L'utilisation de la notion de processus ponctuels marqués s'avère une fois de plus judicieuse pour mettre en place des modèles intégrant ce risque supplémentaire dans le cadre du contrôle des risques des produits structurés de crédit tels les swaps ou les "Collaterized Debt Obligations." En effet, dans ce contexte, nous pouvons exhiber des formules quasi-explicites pour calculer les différentes espérances conditionnelles nécessaires à l'élaboration du calcul des prix. Ce faisant, il est alors possible comme montré dans ce chapitre d'évaluer tout aussi bien un produit structuré permettant de se protéger contre une dégradation de notes qu'une prime de "Credit Default Swaps." Nous indiquons par ailleurs une méthode statistique pour estimer les paramètres des modèles proposés.

Conclusion Générale

Nous avons essayé dans le cadre de cette thèse de comprendre le processus de notation des entreprises de différentes zones géographiques et secteurs d'activité. Pour ce faire, nous avons décidé de ventiler notre étude en trois phases principales, en l'occurrence une première phase réservée à l'étude du processus de notation en tenant compte de la durée des épisodes, une seconde phase consacrée à l'étude de l'effet de la crise sur ce processus et une troisième phase consacrée à l'étude de la contagion. Avant de présenter en détail les résultats obtenus, nous avons développé, dans le cadre d'une partie préliminaire, la définition de la notation et du risque de crédit. Nous avons également précisé les conditions générales d'attribution de telle ou telle note par ces différentes agences ainsi que les différentes étapes de déroulement du processus de notation. Dans ce sens, nous avons présenté les échelles de notation des agences leaders, en distinguant entre les échelles de long terme et les échelles de court terme et entre le grade d'investissement et le grade spéculatif.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté la notion de processus ponctuel marqué afin de modéliser les différents aspects du risque de crédit des obligations. Ce chapitre est une présentation générale des différentes techniques utilisées par la suite dans les trois derniers chapitres. En effet, dans ce chapitre, nous rappelons les lois de probabilité classiques pour modéliser les durées, ainsi que les notions fondamentales pour la mise en place d'une modélisation précise de l'effet de contagion. Dans la continuité du chapitre précédent, le troisième chapitre a été réservé à la modélisation du processus de notation en utilisant un modèle de durée ACD et les lois de durée, comme la loi de Burr. Le choix de ce type de type de loi a été justifié par le fait qu'elle présente une plus grande flexibilité au profil de la fonction de hasard conditionnelle par rapport aux autres lois. De plus, elle contient comme cas particuliers les lois exponentielles et la loi de Weibull. Cette étude a été menée sur des données internes à Standard and Poor's, sur un groupe d'entreprises des zones européenne, africaine et asiatique, et de différents secteurs d'activité. Les résultats obtenus dans le cadre de ce chapitre ont montré que les fonctions de hasard sont croissantes en fonction de la durée des épisodes de notation. En effet, l'agence Standard and Poor's a par exemple tendance à évaluer plus rapidement les entreprises appartenant à une classe spéculative que les entreprises appartenant à la catégorie investissement.

Toutefois, ce résultat peut faire l'objet d'améliorations via l'introduction d'autres secteurs d'activité comme les banques, ou via un choix plus large en

termes de pays. Ce troisième chapitre a été mené dans le cadre de données internes, ce qui nous a permis d'analyser plus finement le processus de notation puisque basé sur des informations d'ordre confidentielles et internes à l'agence. Nous avons développé par la suite dans le chapitre suivant une étude des processus de notation afin de mesurer l'effet de la crise sur ces derniers, en utilisant cependant des données publiques afin de pouvoir comparer nos résultats avec d'autres études déjà parues. Dans le quatrième chapitre, nous nous sommes également intéressés à la notation des entreprises de différents secteurs d'activité et différentes zones géographiques. Nous avons par contre introduit une variable latente non observable dans le but de capter l'effet de la crise sur le processus de notation des firmes. Cette variable nous a permis d'estimer les probabilités à posteriori d'appartenance à des groupes de référence qui se distinguent par la durée moyenne de notation et de la direction de la note.

Les résultats trouvés dans le cadre de cette estimation montre la présence d'un effet positif de la crise sur les processus de notations de toutes les entreprises américaines, européennes et asiatiques. En effet, les épisodes de notation considérés après la crise ont tendance à appartenir au groupe caractérisé par une durée plus courte et un abaissement de la note. Dans le cadre du cinquième chapitre, nous nous sommes intéressés à l'effet de la contagion qui se produit en particulier entre zones géographiques et secteurs d'activité. Pour cela, nous avons utilisé la notion de processus ponctuel marqué. Nous avons par la suite évalué différents produits structurés de crédit, permettant par exemple de se protéger contre une dégradation de notes ou tels que les "Credit Default Swaps."

Au final, il faut noter que l'étude des processus de notation tenant compte de la durée et du sens de variation de la note peut faire l'objet de plusieurs autres extensions ainsi que l'étude de la relation entre spread de crédit et note. Nous pouvons par exemple chercher à mieux cerner le lien exact entre spread et note. Des exemples récents montrent en effet que, sous certaines conditions, une dégradation de note n'entraîne pas systématiquement une élévation du spread, voire même peut être associée à une diminution (voir le cas de la France). En effet, le rôle des banques centrales apparaît directement ou indirectement comme un élément majeur dans la détermination des spreads souverains. Un état peut aussi intervenir pour soutenir un secteur d'activité ou une entreprise donnée lorsque des difficultés notoires surviennent. D'autres axes de recherche peuvent aussi être envisagés. Si l'analyse des défaillances des entreprises relèvent en effet de la micro-économétrie, il est clair que ces défaillances sont liées entre elles, si bien que des faillites en chaîne possibles pourraient avoir des répercussions au niveau macro-économique et induire des cycles, ou à l'inverse les effets macro-économiques pourraient augmenter globalement les probabilités de défaut. Il serait envisageable dans ce contexte d'introduire des fonctions de hasard conditionnelles à la réalisation de certaines variables macoéconomiques.

Bibliographie

[1] Adler M, Dumas B. (1983). International portfolio choice and corporation finance a synthesis. *Journal of Finance*. 38, 925-984.

[2] Altman E.I. (1998). The importance and subtlety of credit rating migration . *Journal of Banking and Finance,* 22, 1231 - 1247

[3] Altman E.I., Kao D.L.(1992). The implications of corporate bond ratings drift. *Financial Analysts Journal* 48. 64-67.

[4] Alexander C (2004). Normal mixture diffusion with uncertain volatility : modelling short and long term smile effects. *Journal of Banking and Finance,* 28, 2957-2980.

[5] Alexander C , Narayanan, S (2009). Option pricing with normal mixture returns : modelling excess kurtosis and uncertainty in volatility. ICMA Centre, University of Reading.

[6] Amin K, Jarrow R (1991). Pricing foreign currency options under stochastic interest rates. *Journal Money Finance*, 10 310-329.

[7] Ansel JP, Stricker (1992). Lois de martingale, densités et décomposition de Föllmer Schweizer. *Ann.Inst.Henri Poincaré* 28 375-392.

[8] Anderson RW, S Sundaresan (1996). Design and valuation of debt contracts. *Review Of Financial Studies,* Vol. 9, pp. 37-68.

[9] Artzner P, Delbaen F, Eber JM , Heath, D (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* 9, 203-228.

[10] Azizpour S, K Giesecke (2008). Self-exciting corporate defaults contagion versus frailty. Stanford University.

[11] Azizpour S, K Giesecke (2011). Premia for correlated default risk. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 358, 1340-1357.

[12] Bacmann JF, Scholz S (2003). Alternative performance measures for hedge funds. *AIMA Journal*, June.

[13] Bangia A, Diebold FX, Kronimus T (2002). Rating migration and the business cycle with application to credit portfoliostress testing. *Journal of Banking and Finance* 26, 445-474.

[14] Bardhan I, Chao X (1993). Pricing options on securities with discontinuous returns. *Stochastic processes and their applications,*48 123-137.

[15] Barrieu P, El Karoui, N (2005). Inf-convolution of risk measures and optimal risk transfer. *Finance and Stochastics* 9, 269-298.

[16] Basford, KE., McLachlan, GJ (1985). Likelihood estimation with normal mixture models. *Annals of Applied Statistics,* 34, 282-289.

[17] Bauwens, L, Galli F, P. Giot (2008). The moments of Log-ACD models quantitative and qualitative. *Analysis in Social Sciences*, 2, 1-29.

[18] Bauwens L, et P Giot (2000). The Logarithmic ACD Model : an Application to the Bid-ask Quote Process of Three NYSE Stocks. *Annales d'Economie et de Statistique*, 60, 117-149.

[19] Bauwens, L., et P. Giot (2001a). The Moments of First-order Log-ACD Models. Unpublished Paper, Université Catholique de Louvain.

[20] Bauwens L, P Giot (2001b). Econometric modelling of stock market intraday activity advanced studies in theoretical and applied econometrics. *Kluwer Academic Publishers.vol. 38*

[21] Bauwens L, P Giot (2003). Asymmetric ACD models : introducing price information in ACD models. *Empirical Economics*, 28, 709-731.

[22] Bauwens L, Giot P, Grammig J., D. Veredas (2004). A Comparison of financial duration models via density forecasts. *International Journal of Forecasting*, 20, 589-609.

[23] Bauwens L, D. Veredas (2004). The stochastic conditional duration model : a latent factor model for the analysis of financial durations. *Journal of Econometrics*, 119(2), 381-412.

[24] Luc Bauwens, Nikolaus Hautsch . Modelling Financial High Frequency Data Using Point Processes.

[25] Bellamy, N., Jeanblanc, M (1999). Incompleteness of markets driven by a mixed diffusion. *Finance and Stochastics.*, Vol IV, No 2.

[26] Belkin B, Suchower S, Forest, L.R (1998). The effect of systematic credit risk on loan portfolio value-at-risk and loan pricing. *CreditMetrics Monitor, First Quarter*,17-28.

[27] Bellalah M, Lavielle M (2002). A simple decomposition of empirical distributions and its applications in asset pricing. *Multinational Finance Journal,* 6, 99-130.

[28] Bellalah M, Prigent J.-L (2002). Pricing standard and exotic options in the presence of a finite mixture of Gaussian distributions. *International Journal of Finance,* 13, 1974-2000.

[29] Bibby, BM, Sorensen M (1997). A Hyperbolic diffusion model for stock prices. *Finance and Stochastics.* 1 25-41.

[30] Björk T., Kabanov Y, Runggaldier W (1997). Bond market structure in the presence of marked point processes. *Mathematical Finance* 7 211-240.

[31] Black F, Scholes M (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.

[32] Black, Fischer, John C. Cox, (1976). Valuing corporate securities : some effects of bond indenture provisions. *Journal of Finance*, Vol. 31, No. 2 351-367.

[33] Brémaud P. (1981), Point Processes and Queues : Martingale Dynamics. Springer-Verlag, Berlin.

[34] Brigo, D, Mercurio, F. (2001a). Displaced and mixture diffusions for analytically-tractable smile models. *Mathematical Finance.*

[35] Brigo, D, Mercurio, F. (2001b). Interest-rate models : theory and practice. Springer-Verlag, Berlin.

[36] Brigo, D, Mercurio, F. (2002). Lognormal-mixture dynamics and calibration to market volatility smiles. *International Journal of Theoretical and Applied Finance,* 5, 427-446.

[37] Bruni, C, Koch, G. (1985). Identifiability of continuous mixtures of unknown gaussian mixtures. *Annals of Probability* 13, 1341-1367.

[38] Burgert, C, Rüschendorf, L. (2006). On the optimal risk allocation problem. *Statistics and Decisions* 24, 153-171.

[39] Buhlman H., Delbaen F, Embrecht P , Shiryaev A (1996). No-arbitrage, change of measure and conditional esscher transforms in a semimartingale model of stock processes. *CWI Quaterly* 9291-317.

[40] Campbell R.H, (1991). The world price of covariance risk. *Journal of Finance*, 46, 111-158.

[41] Cathrine Lubochinsky, (2002). Quel crédit accorder aux spreads de crédit. Université Paris 2 ;

[42] Carrasco M, X. Chen (2002). Mixing and moment properties of various GARCH and stochastic volatility models. *Econometric Theory*, 18, 17-39.

[43] Cantor R, Packer F, (1996). Determinants and impact of sovereign credit ratings federal reserve Bank of New York. *Economic Policy Review.*

[44] Carling, K., Jacobson, T., Lind´e, J., and K. Roszbach, (2002), Capital charges under Basel II : Corporate credit risk modeling and the macro economy, Working paper - Sveriges Riksbank.

[45] Carty LV., Fons J. S, (1993). Measuring changes in corporate credit quality, Moody's. Special Report, New York

[46] Chan T. (1999). Pricing contingent claims on stocks driven by Levy processes. *Annals of Applied Probability*, 9, 504-528.

[47] Chou C.S, Meyer P.A. (1975). Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels. Séminaire de probabilités IX. *Lecture Notes in Mathematics*, 226-236.

[48] Clark P.K. (1973). A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices. *Econometrica.* 41 135-155.

[49] Cont, R, Tankov, P. (2003). Financial Modelling with Jump Processes. CRC Press.

[50] Couderc F, O. Renault (2004), Time-to-default : Life cycle, global and industry cycle impacts. Working paper, University of Geneva.

[51] Cox J.C.,J.E Ingersoll, S.A. Ross , (1985). A Theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53, 385-407.

[52] Cox J, Huang C.F, (1989).Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory*, 49, 33-83.

[53] Cox, D.R., Isham, V (1980). Point Processes. Chapman and Hall. New York, NY.

[54] Cox J.C, S.A Ross , Rubinstein M. (1979). Option pricing : a simplified approach. *Journal Financial Economics.* 7 229-263.

[55] Coppeland T.E, J.F. Weston, (1988). Financial Theory and Corporate Policy. Addison-Wesley.

[56] Colwell, DB., Elliott RJ (1993). Discontinuous asset prices and non-attainable contingent claims. *Mathematical Finance.* 3 295-308.

[57] Cvitanic J I, Karatzas, (1992). Convex duality in constrained portfolio optimization. *The Annals of Applied Probability*, 4, 767-818.

[58] Dempster A, Laird N., Rubin D. (1977). Maximum-likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journals of the Royal Statistical Society*, B 39, 1-38.

[59] Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R, Laeven R. (2004). Risk measurement with equivalent utility principles. *Statistics and Decision* 24, 1-25.

[60] Demos A. (2002). Moments et dynamic structure of a time-varying-parameter stochastic volatility in mean model. *The Econometrics Journal*, 5, 345-357.

[61] Dumas B. (1992). Dynamic equilibrium and the real exchange rate in a spatially separated world . *Rev. Financial Stud.*, 5, 153-180.

[62] Dufour, A., R. F. Engle (2000). The ACD Model : Predictability of the time between consecutive trades. unpublished paper. ICMA Centre, University of Reading

[63] Duffie D., L. Saita, K. Wang, (2006a). Multi-period corporate default prediction with stochastic covariates. *Journal of Financial Economics*, vol 83, 3, 635-665

[64] Duffie, D.(1986). Stochastic equilibria : existence, spanning number, and the no expected financial gain from trade hypothesis. *Econometrica,* 54 1161-1183.

[65] Duffie D, D. Lando (1997). Term structures of credit spreads with incomplete accounting information. DP, Stanford University

[66] Duffie D, Kenneth J. Singleton (1999). Modeling term structures of defaultable bonds. *Review of Financial Studies*,12, 687-720.

[67] Ebert U. (2005). Measures of downside risk. *Economics Bulletin,* 4, 1-9.

[68] Eberlein E, Jacod J. (1997). On the range of options prices. *Finance and Stochastics.* 1 131-140.

[69] El Karoui N, R.Myneni, R.Viswanathan , (1992). Arbitrage pricing and hedging of interest rate claims with state variables. working paper, Paris VI, Stanford University.

[70] Engle, R. F. (2000). The Econometrics of Ultra-High Frequency Data. *Econometrica*, 68, 1-22.

[71] Jan Ericsson, Joel Reneby (1998). A Framework for Valuing Corporate Securities. *Applied Mathematical Finance 5.143.163*

[72] Engle R. F, J. R. Russell (1998). Autoregressive conditional duration : a new model for irregular spaced transaction data. *Econometrica*, 66, 1127-1162.

[73] Everit BS, Hand, DJ. (1981). *Monographs in applied probability and statistics.* Finite mixture distributions. Chapman & Hall : London.

[74] Feng D., Jiang G. J., P. X. K. Song (2004). Stochastic conditional duration models with leverage effect for financial transaction data. *Journal of Financial Econometrics*, 2, 390-421.

[75] Feng D., Gourieroux C, Jasiak J., (2008). The ordered qualitative model for credit rating transitions. *Journal of Empirical Finance*, 15, 111-130.

[76] Fernandes Marcelo, Grammig, Joachim,(2005).Nonparametric specification tests for conditional duration models. *Journal of Econometrics*, vol. 127(1) 35-68.

[77] Fernandes M. (2004). Bounds for probability distribution function of the linear ACD process. *Statistics and Probability Letters,* 68, 169-176.

[78] Fernandes M., J. Grammig (2005). Non-parametric specifications tests for conditional duration models. *Journal of Econometrics*, 127, 35-68.

[79] Fernandes M., J. Grammig (2006). A family of autoregressive conditional duration models. *Journal of Econometrics*, 130, 1-23.

[80] Fernandes M., Medeiros M. C., A. Veiga (2006). A semi- parametric functional coefficient autoregressive conditional duration model. Unpublished Paper, Pontifical Catholic.University of Rio de Janeiro.

[81] Fishburn P.C. (1977). Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns. *American Economic Review,* 67, 116-126.

[82] Fishburn P.C. (1984). Foundations of risk measurement.I. Risk as probable loss. *Management Science,* 30, 396-406.

[83] Fledelius P., Lando D, J.P. Nielsen, (2004). Non-parametric analysis of rating transition and default data. *Journal of Investment Management Vol. 2, No.2.*

[84] Focardi SM, FJ. Fabozzi (2005). An autoregressive conditional duration model of credit-risk contagion. *Journal of Risk Finance*, 6, 208-225.

[85] Föllmer H., Schweizer, M. (1991). Hedging of contingent claims under incomplete information. *Applied Stochastic Analysis, Stochastics Monographs,eds. M.H.A.Davis and R.J.Elliott , Gordon and Breach*,Vol 5 389-414.

[86] Frey R., Runggaldier, W.J. (1999). A nonlinear filtering approach to volatility estimation with a view towards high frequency data . Preprint Swiss banking institute, University of Zürich.

[87] Fritelli, M. (1999). On minimal martingale measure. Preprint University of Milan.

[88] Frühwirth-Schnatter, S. (2006). Finite mixture and markov switching models. Springer, New York.

[89] Frachot A.(1995). Factor models of domestic and foreign interest rates with stochastic volatility. *Mathematical Finance*, 5, 167-185.

[90] Frydman H, Schuermann T (2007). Credit rating dynamics and markov mixture models. *Journal of Banking,* 31 8 2303–2323

[91] Gagliardini P, C. Gourieroux, (2005a). Stochastic migration models with application to corporate risk. *Journal of Financial Econometrics*, 3, 188-226.

[92] Gagliardini P, C. Gourieroux, (2005b). Migration correlation : definition and efficient estimation. *Journal of Banking and Finance 29, 865-894.*

[93] Geman H., El Karoui N. , Rochet J.C. (1995). Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing. *Journal. Appl. Prob.* 32 443-458.

[94] Geman H., Madan D , Yor, M. (1998). Asset prices are brownian motion : only in business time. Preprint University of Maryland.

[95] Ghysels E., Gouriéroux C., J. Jasiak (2004). Stochastic volatility durations. *Journal of Econometrics*, 119, 413-435.

[96] Ghysels E., J. Jasiak (1998). GARCH for irregularly spaced financial data : the ACD-GARCH model. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 2, 133-149.

[97] Giesecke Azizpour, Baeho, Kim Kay (2011). Premia for correlated default risk by shahriar. *Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 35, No. 8, pp. 1340-1357*

[98] Giot P. (2001). Time transformations, intra-day data and volatility models. *Journal of Computational Finance,* 4, 31-62.

[99] Giot P. (2005). Market risk models for intraday data. *European Journal of Finance*, 11, 309-324.

[100] Glaser R. E. (1980). Bathtub and related failure rate characterizations. *Journal of American Statistical Association*, 75, 667-672.

[101] Glasserman P., Kyoung-Kuk Kim (2009) : Saddlepoint approximations for affine jump-diffusion models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33, 15-36.

[102] Gonzales F., Haas F., Johannes R., Persson M., Toledo L., Voili R., Wieland, M, C. Zins (2004) : L'incidence des notations sur les dynamiques de marché : une revue de la littérature. *Revue de la Stabilité Financière (Banque de France),* 4, 53-80.

[103] Gourieroux C., Jasiak J., Lefol G. (1996). Intra-day market activity. working paper. *CREST No 9633.*

[104] Grammig J., K. O. Maurer (2000). Non-monotonic hazard functions and the autoregressive conditional duration model. *Econometrics Journal*, 3, 16-38.

[105] Grammig J., M.Wellner (2002). Modeling interdependence of volatility and intertransaction duration processes. *Journal of Econometrics*, 106, 369-400.

[106] Hathaway R. A. (1985). Constrained formulation of maximum-likelihood estimation for normal mixture distributions. *Annal Statestic.* 13, 795-800.

[107] Hamilton J. D, O. Jorda (2002). A model for the federal funds rate target. *Journal of Political Economy*, 110, 1135-1167.

[108] Harrison J.M, S. Pliska , (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their applications*, 11, 215-260.

[109] Harrison J.M., Kreps D. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal Econ. Theory,* 20 381-408.

[110] Hasbrouck J. (1991). Measuring the information content of stock trades. *Journal of Finance,* 46 (1), 179-207.

[111] Hautsch N. (2001). The Generalized F ACD model. Unpublished Paper, University of Konstanz.

[112] Hautsch, N. (2006). Testing the conditional mean function of autoregressive conditional duration models. Unpublished Paper, University of Copenhagen.

[113] Heath D., Jarrow R., Morton A., (1992). Bond pricing and the term structure of interest rates : a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60, 77-106.

[114] He C., Teräsvirta T., H. Malmsten (2002). Fourth moment structure of a family of firstorder exponential GARCH models. *Econometric Theory*, 18, 868-885.

[115] Jacod J.(1975). Multivariate Point Process : predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. *Z.Wahrs. verw. Gebiete.* 31 235-253.

[116] Jacod J. (1977). A general theorem of representation for martingales. *Proceedings of the symposia in pure mathematics.* 31 37-53.

[117] Jacod J., Shiryaev, A.N. (1987). Limit Theorems for Stochastic Processes. Berlin : Springer-Verlag.

[118] Jarrow R. A., Lando, D., Turnbull, S. M. (1997). A Markov model for the term structure of credit risk spreads. *Review of Financial Studies*, 10,481-523.

[119] Jarrow R., Madan D. (1995). Option pricing using the term structure of interest rates to hedge systematic discontinuities in asset returns. *Mathematical Finance.* 5 311-336.

[120] Robert A. Jarrow Stuart M. Turnbull (1995). Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. *Journal of Finance*, Vol. 50, No. 1 ,53-85.

[121] Jasiak J. (1998). Persistence in Intertrade Durations. *Journal of Finance*, 19, 165-195.

[122] Jeanblanc M., Pontier, M. (1992). Optimal portfolio for a small investor in a market model with discontinuous prices. *Appl.Math.Optim.* 22 287-310.

[123] Kaas R., Goovaerts M., Dhaene, J., Denuit M. (2004). Modern actuarial risk theory. Springer-Verlag : New York.

[124] Kadam A., Lenk P.(2008). Bayesian inference for issuer heterogeneity in credit ratings migration. *Journal of Banking and Finance,* 32, 2267–2274.

[125] Kaplan P., Knowles, J. A. (2004). Kappa : A generalized downside risk-adjusted performance measure. *Journal Performance Measurement* 8, 42-54.

[126] Karanasos, M. (2001). The statistical properties of long-memory and exponential ACD models. Unpublished Paper, University of York.

[127] Karanasos, M. (2004). The statistical properties of long-memory ACD models. WSEAS *Transactions on Business and Economics*, 2, 169-175.

[128] Karanasos, M., J. Kim (2003). Moments of the ARMA-EGARCH model. *Econometrics Journal*, 6, 146-166.

[129] Karanasos M., Psaradakis, Z., M. Sola (2003). On the autocorrelation properties of longmemory GARCH processes. *Journal of Time Series Analysis*, 25, 265-281.

[130] Karatzas I., Lehoczsky J.P., Shreve,S.E.(1987), Optimal portfolio and consumption decisions for a "small" investor on a finite horizon. *Journal Control and Optimization*, 25, 1557-1586.

[131] Karlin S., H. Taylor (1975). A first course in stochastic processes. Academic Press, London.

[132] Kavvathas, D. (2001), Estimating credit rating transition probabilities for corporate bonds.Working paper , University of Chicago.

[133] Kazemi H., Schneeweis T., Gupta, R. (2004). Omega as performance measure. *Journal of Performance Measurement*, Spring.

[134] Karr A.F. (1991). Point processes and their statistical inference. Marcel Dekker. New-York.

[135] Keating C., Shadwick, W.F. (2002). A universal performance measure. *Journal of Performance Measurement*, Spring, 59-84.

[136] Kim, Y, Sohn S, (2008). Random effects model for credit rating transitions. *European Journal of Operational Research,* 184 : 561 - 573

[137] Koopman S.J., A. Lucas, (2005). Business and default cycles for credit risk. *Journal of Applied Econometrics* 20, 311-323.

[138] Koopman S.J., Lucas, A., R.J.O. Daniels, (2005). A non-Gaussian panel time series model for estimating and decomposing default risk. *Tinbergen Institute Discussion paper*, TI 05-060/4.

[139] Siem Jan Koopman, Andre Lucas Bernd, Schwaab (2008). Modeling frailty-correlated defaults using many macroeconomic covariates. Department of Econometrics, VU University Amsterdam Duisenberg school of fnance

[140] Siem Jan Koopman, André Lucas et André Monteiro (2005). The Multi-State Latent factor intensity model for credit rating transitions. Tinbergen Institute.

[141] Kormylo, J.J, Mendel, J.M. (1982). Maximum likelihood detection and estimation of Bernoulli-Gaussian Processes. *IEEE, Transactions on Information Theory*, 28, 482-488.

[142] Harrison J.M., D. Kreps (1979). Martingales and Arbitrage in multiperiod securities Markets. *Journal Econ. Theory* , 20 , 381-408.

[143] David Lando, Torben M. Skødeberg. (2002) Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations. *Journal of Banking and Finance,* 26 423-444.

[144] Christensen, J. E. Hansen et D. Lando, (2004). Confidence Sets for Continuous-Time Rating Transition Probabilities. *Journal of Banking and Finance,* 28 2575-2602.

[145] Last G., Brandt, A. (1995). Marked point processes on the real line. Springer-verlag, Berlin.

[146] Leblanc B., Yor, M. (1996). Quelques applications des processus à accroissements indépendants en mathématiques financières. Preprint Laboratoire de Probabilités, Université Paris VI.

[147] Leblanc B., Yor, M. (1998). Lévy processes in finance : a remedy to the non-stationnarity of continuous martingales. *Finance and Stochastics,* 2 399-408.

[148] Lesne, J.P., Prigent J.L. (1996). A general subordinated stochastic process for the derivatives pricing. Proceedings of the conference "Stable and jumps processes in Finance". *Journal of Theoretical and Applied Finance.*

[149] Lesne J.P., Prigent J.L., Scaillet, O. (1998). Convergence of discrete time options pricing models under stochastic interest rates. *Finance and Stochastics*, vol IV, No 1 81-93 .

[150] Lessard D.,(1983). *Principles of International Portfolio.* Selection in International Finance. Handbook John Wiley & Sons.

[151] Leroux B.G.(1992). Consistent estimation of mixing distribution. *Annals of Statistics,* 20, 1350-1360.

[152] Li W. K., P. L. H. Wu (2003). On the residual autocorrelation of the autoregressive conditional duration model. *Economics Letters*, 79, 169-175.

[153] Lunde, A. (1999). A generalized gamma autoregressive conditional duration model. Unpublished Paper, Aalborg University

[154] Madan D.B., Milne, F. (1991). Option pricing with V.G. martingale components. *Mathematical Finance* . 14 39-55.

[155] Mandelbrot B., Taylor H.M. (1967). On the distribution of stock price differences. *Operations Research.* 11 1057-1062.

[156] McDonald J. B., D. O. Richards (1987a). Model selection : some generalized distributions communications in statistics. *Theory and Methods*, 16, 1049-1074.

[157] McDonald J. B., D. O. Richards (1987b). Hazard rates and generalized beta distributions. *IEEE Transactions on Reliability*, 36, 463-466.

[158] McLachlan, G.J, Peel, D. (2000). *Finite mixture models.* Wiley series in probability and statistics. wiley.

[159] McNeil A.J., J.Wendin, (2006). Bayesian inference for generalized linear mixed models of portfolio credit risk. *Journal of Empirical Finance*, 14, 131-149.

[160] Merton, R. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal Financial Economics*, 3 125-144.

[161] Merton R.C. (1974). On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29, 449-470.

[162] Meitz, M.,T. Teräsvirta (2006). Evaluating models of autoregressive conditional duration. *Journal of Business and Economic Statistics*, 24, 104-124.

[163] Melick, W., Thomas, C.P. (1997). Recovering an asset's implied pdf from option prices : An application to crude oil during the Gulf crisis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 32, 91-115.

[164] Nakagawa, H. (2010a). Modeling of contagious rating changes and its application to multi-downgrade protection, *JSIAM Letters*, 2, 65-68.

[165] Nakagawa, H. (2010b). Analysis of records of credit rating transition with mutually exciting rating-change intensity model. *Transactions of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics* 20,183-202.

[166] Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns : a new approach. *Econometrica*, 59, 347-370.

[167] Nickell P., Perraudin W, Varotto S. (2000). Stability of rating transitions. *Journal of Banking and Finance,* 24, 203-227.

[168] Noetzlin B., Solnik B., (1982). Optimal international asset allocation. *Journal of Portfolio Management*, 11-21.

[169] James R. Norris (1998). *Markov Chains.* Cambridge University Press, 254 pages

[170] Odier P., Solnik B.(1993). Lessons for international asset allocation. *Financial Analysts Journal*, 63-67.

[171] Pacurar M. (2008). Autoregressive conditional duration models in finance : a survey of the theoretical and empirical literature. *Journal of Economic Surveys.*

[172] Pearson K. (1894). Contributions to the mathematical theory of evolution. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 185, 71-110.

[173] Pedersen C.S., Satchell, S.E. (1998). An extended family of financial-risk measures. *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory,* 23, 89-117.

[174] Peters B. C. Jr., Walker, H. F. (1978). An iterative procedure for obtaining maximum-likelihood estimators of the parameters for a mixture of normal distributions. *SIAM Journal on Applied Mathematics,* 35, 362-378.

[175] Pflug G. (2006). On distortion functionals. *Statistics and Decisions* 24, 45-60.

[176] Pham H. (1997). Optimal stopping, free boundary and American option in a jump diffusion model. *Applied Mathematics and Optimization.* 35 145-164.

[177] Pliska S.R., (1986).A stochastic calculus model of continuous trading : optimal portfolio. *Mathematics of Operations Research*, 11, 371-382.

[178] Prigent J.-L., O. Renault, O. Scaillet (2001). An autoregressive conditional binomial option pricing model, in selected papers from the first world congress of the bachelier finance society, ed. by H. Geman, D. Madan, S. R. Pliska, and T. Vorst. Springer-Verlag : Berlin Heidelberg New York, 531 pages.

[179] Prigent J.-L. (2007). *Portfolio Optimization and Performance Analysis*, Chapman & Hall, Boca Raton.

[180] Prigent J.L. (2001). Option pricing with a general marked point process. *Mathematics of Operations Research*, 2001, Vol. 26, 50-66

[181] Protter Ph.(1992). Stochastic integration and differential equations . Springer verlag, New York.

[182] Redner, R.A, Walker, H.F. (1984). Mixture densities, maximum likelihood and the EM algorithm. *SIAM Review* 26, 195-223.

[183] Ridolfi, A. (1997). Maximum likelihood estimation of hidden Markov model parameters, with application to medical image segmentation. Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, Facoltà di Ingegneria, Milan, Italy.

[184] Ritchey R.J. (1990). Call option valuation for discrete normal mixtures. *Journal of Financial Research* 13, 285-296.

[185] Rogers L.C.G., Zane O. (1998). Designing models for high frequency data. Preprint.

[186] Roberts S., Husmeier D., Resek, I, Penny, W. (1998). Bayesian approaches to Gaussian mixture modelling. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 20, 1133-1142.

[187] Ryden T. (1994). Consistent and asymptotically normal parameter estimates for hidden Markov models. *Annals of Statistics,* 22, 1884-1895.

[188] Schweizer M. (1991). Option hedging for semimartingales. *Stochastic Processes and their applications,* 37 339-363.

[189] Schweizer, M. (1993). Variance-optimal hedging in discrete time. *Mathematics of Operation Research.,* 20 1-32.

[190] Sortino F. A., Price L.N. (1994). Performance measurement in a downside risk framework. *Journal of Investing* 3, 59-65.

[191] Szegö G. (2002). Measures of risk. *Journal of Banking and Finance* 26, 1253-1272.

[192] Titterington, D.M. Smith, A.F.M., Makov U.E. (1985). *Statistical analysis of finite mixture distributions*. Wiley : New York

[193] Tversky A., Kahneman, D. (1992). Advances in prospect theory : cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty* 5, 297-323.

[194] Stuart Turnbull, Catalina Stefanescu, Radu Tunaru (2008).The credit rating process and estimation of transition probabilities : A bayesian approach.

[195] Unser, M. (2000). Lower partial moments as measures of perceived risk : an experimental study. *Journal of Economic Psychology* 21, 253-280.

[196] Wilson T. (1997a). Portfolio credit risk I. *Risk*, 10 9, 111-117.

[197] Wilson T. (1997b). Portfolio credit risk II. *Risk*, 10 10, 56-61.

[198] Yamanaka S., Sughira M., Nakagawa, H. (2011). Modeling of contagious credit events and risk analysis of credit portfolios. Department of Mathematical Informatics, University of Tokyo.

[199] Zhang M. Y., Russell J. R., R. S. Tsay (2001). A Nonlinear autoregressive conditional duration model with applications to financial transaction data. *Journal of Econometrics*, 104, 315-335.49 QASS, Vol. 2 1, 2008, 29-49

[200] Zhou Chunsheng (1997). A jump-diffusion approach to modeling credit risk and valuing defaultable securities.Working paper 1997-15, Federal Reserve Board .